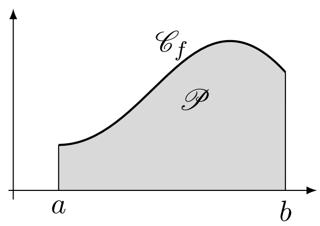
Intégration

1 Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Prérequis : On considère connue une notion intuitive d'aire. L'aire d'une figure plane peut être vue comme le nombre d'unités d'aire nécessaire pour recouvrir exactement cette figure, au besoin après un grand nombre de découpages et assemblages. Le problème est qu'en général, le calcul exact nécesssite un passage à la limite, comme par exemple dans le calcul de l'aire d'un disque par la méthode d'Archimède.

1.1 Définition

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$, et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On lui associe la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les deux droites d'équation $x=a$ et $x=b$, autrement dit, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Nous admettrons le résultat suivant : **Si f est continue, la partie $\mathscr{P}$ admet une aire.**

Dans la suite du cours, les fonctions rencontrées seront supposées continues.

Définition 1
On appelle intégrale de f entre a et b l'aire de la partie $\mathscr{P}$ et on la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque :

Cette aire est exprimée en unités d'aire. Attention : l'unité d'aire n'est pas forcément le cm^2.

Propriété 1
Soit f une fonction continue positive sur $[a\,;b]$, F une de ses primitives. Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

Définition 2
Soit f une fonction continue (pas forcément positive) sur $[a\,;b]$, F une de ses primitives.
On appelle intégrale de f entre a et b le nombre : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

Notation : $[F(x)]_a^b = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

Interprétation graphique :

Propriété 2
$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_s - \mathcal{A}_i$, où :

- $\mathcal{A}_s$ est l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, entre a et b, sur les intervalles où f est positive
- $\mathcal{A}_i$ est l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, entre a et b, sur les intervalles où f est négative.

1.2 Propriétés de l'intégrale

Propriété 3
Soient f et g, deux fonctions continues sur un intervalle I ; soient $a, b, c \in I$, et soit k, un réel.

1. Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
2. Linéarité :
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
3. Positivité : Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
4. Croissance : Si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

1.3 Aire entre deux courbes

Soient f et g, deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. On suppose $f \leq g$ sur $[a\,;b]$.

L'aire $\mathcal{A}$ entre les deux courbes sur $[a\,;b]$ est alors $\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

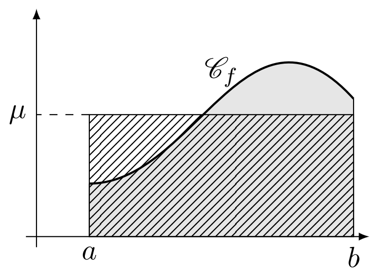
Si f et g sont positives, c'est une conséquence de la propriété précédente ; sinon, on on remplace f par $f_1 = f + K$ et g par $g_1 = g + K$ où la constante K est choisie de telle sorte que f_1 et g_1 soient positives.

2 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition 3
On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre :
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Interprétation : Soit $g : g(x) = \mu$ pour tout x (g est constante), alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Si f est positive, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est égale à celle du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur μ.



Propriété 4 (Inégalité de la moyenne)
Soit f continue sur $[a\,;b]$ et soient m et M deux nombres tels que pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$.
Alors la valeur moyenne μ de f sur $[a\,;b]$ vérifie : $m \leq \mu \leq M$.

Cette propriété est une conséquence de la croissance de l'intégrale : si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors $\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$ c'est à dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

3 Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

On veut une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue et positive f entre a et b, c'est à dire une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. On divise l'intervalle $[a\,;b]$ en n parties égales : on obtient ainsi $n+1$ valeurs : $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. On construit n rectangles de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, de hauteur $f(\theta_k)$, où $\theta_k \in [x_k;x_{k+1}]$. En général, on prend $\theta_k = x_k$, ou $\theta_k = x_{k+1}$, ou encore $\theta_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$. La figure 1, ci-dessous illustre le premier cas avec $n = 6$.

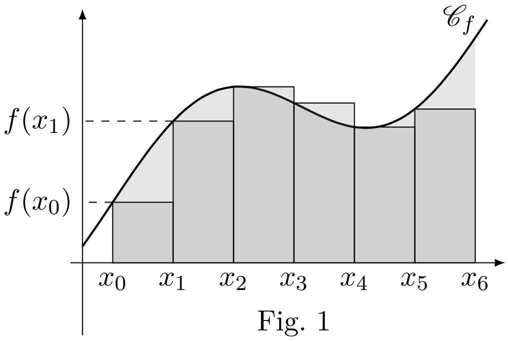


Fig. 1

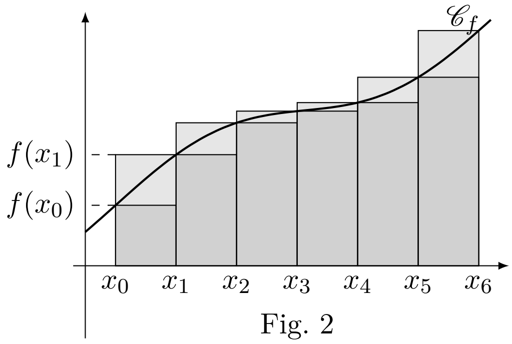


Fig. 2

Si la fonction f ne varie pas trop sur chacun des intervalles $[x_k\,;x_{k+1}]$, l'aire sous la courbe entre x_k et x_{k+1} est proche de l'aire du rectangle de base $[x_k\,;x_{k+1}]$. La somme des aires de chacun des rectangles est donc une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, on démontre que la somme des aires des rectangles tend vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Dans le cas particulier où f est croissante, on voit que l'aire sous la courbe entre x_k et x_{k+1} est comprise entre les deux rectangles de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, l'un de hauteur $f(x_k)$ et l'autre de hauteur $f(x_{k+1})$, comme le montre la figure 2. En nommant $\mathscr{A}_i$ la somme des aires des petits rectangles et $\mathscr{A}_s$ la somme des aires des grands rectangles, on obtient donc : $\mathscr{A}_i \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \mathscr{A}_s$.

Prenons l'exemple où le rectangle de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, a pour hauteur $f(x_k)$. Posons : $h = \dfrac{b-a}{n} = x_{k+1} - x_k$.

En appliquant le principe précédent, on trouve :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$