Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 :

1. $3\ln(a^2) - \ln(a^3) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 3 \times 2\ln(a) - 3\ln(a) + \ln(1) - \ln(a) = 2\ln(a)$

2. $\ln(15\mathrm{e}) - \ln(\mathrm{e}^2) - \ln(5) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right) = \ln(15) + \ln(\mathrm{e}) - 2\ln(\mathrm{e}) - \ln(5) + \ln(\mathrm{e}) - \ln(3)$

$$= \ln(15) - \ln(5) - \ln(3)$$
$$= \ln(5 \times 3) - \ln(5) - \ln(3)$$
$$= \ln(5) + \ln(3) - \ln(5) - \ln(3)$$
$$= 0$$

3. On doit avoir : $5x - 5 > 0$ soit $x > 1$ et $2x - 1 > 0$ soit $x > \dfrac{1}{2}$
La première condition implique la seconde : l'ensemble des valeurs possibles est donc $]1\,;+\infty[$
L'équation s'écrit aussi : $\ln(5x-5) = \ln((2x-1) \times 2)$ soit : $\ln(5x-5) = \ln(4x-2)$
On applique la fonction exponentielle aux deux membres :
$\mathrm{e}^{\ln(5x-5)} = \mathrm{e}^{\ln(4x-2)}$
$5x - 5 = 4x - 2$
$5x - 4x = -2 + 5$
$x = 3$
On vérifie que 3 fait partie des valeurs possibles : c'est juste. La solution de l'équation est donc : $x = 3$

4. On doit avoir : $x + 1 > 0$ soit $x > -1$ et $4x > 0$ soit $x > 0$
La seconde condition implique la première : l'ensemble des valeurs possibles est donc $]0\,;+\infty[$
L'inéquation s'écrit aussi : $\ln((x+1) \times 3) \leq \ln(4x)$ soit : $\ln(3x+3) \leq \ln(4x)$
On applique la fonction exponentielle aux deux membres :
$\mathrm{e}^{\ln(3x+3)} \leq \mathrm{e}^{\ln(4x)}$
$3x + 3 \leq 4x$
$3 \leq 4x - 3x$
$x \geq 3$
On vérifie que les nombres supérieurs à 3 font partie des valeurs possibles : c'est juste. L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $[3\,;+\infty[$

Exercice 2 :

1. On pose : $u(x) = 3x + 5$; alors : $f(x) = \ln(u(x))$
D'après le cours, on a alors : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
On calcule : $u'(x) = 3$
Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{3}{3x+5}$

2. Posons : $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x+1$. Alors : $g = \dfrac{u}{v}$

   On en déduit (formule classique) : $g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   On calcule : $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

   Ainsi : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times (x+1) - \ln(x) \times 1}{(x+1)^2}$

   On peut arranger un peu le résultat en multipliant par x le numérateur et le dénominateur :

   $g'(x) = \dfrac{(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)^2}$

Exercice 3 :

$18 \times 0,7^n < 0,001$ est équivalent successivement à :

$0,7^n < \dfrac{0,001}{18}$

$\ln(0,7^n) < \ln\left(\dfrac{0,001}{18}\right)$ (car la fonction ln est strictement croissante)

$n\ln(0,7) < \ln\left(\dfrac{0,001}{18}\right)$

$n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{18}\right)}{\ln(0,7)}$ (car on divise par un nombre positif)

$n > \dfrac{\ln(0,001) - \ln(18)}{\ln(0,7)}$

On trouve $n > 27,4$. Comme n est un entier, on peut écrire : $n = 28$.

Vérifions : $18 \times 0,7^{27} \simeq 0,001183$ et $18 \times 0,7^{28} \simeq 0,000828$. Ça marche.

Exercice 4 :

1. $f(x) = 2\ln(x) - x + 1$

   Par conséquent :

   $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{x} = \dfrac{2-x}{x}$ Pas de difficulté.

2. Le dénominateur est positif, puisque $x \in]0\,;+\infty[$. Donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$.

   On résout par exemple : $2 - x \geq 0$

   $2 \geq x$ soit $x \leq 2$

   On en déduit le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	0,386	↘	

Le maximum est $f(2) = 2\ln(2) - 2 + 1 \simeq 0,386$

3. On a d'après le cours : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

   D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -x + 1 = -0 + 1 = 1$

   On en déduit (limite d'une somme) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   On peut donc compléter le tableau précédent :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,386$	$\searrow$	$-\infty$

   Remarquons que ça concorde avec la courbe représentant f.

4. L'équation de la tangente à la courbe représentant f en a est (rappel) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

   $\mathscr{T}$ a donc pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   $f(1) = 2\ln(1) - 1 + 1 = 0 + 0 = 0$

   $f'(1) = \dfrac{2-1}{1} = 1$ (d'après la question 1)

   Par conséquent, l'équation de $\mathscr{T}$ est : $y = x - 1$