# Variables aléatoires discrètes

## 1 Rappels de première

### 1.1 Définition

**Définition 1**
Une **variable aléatoire discrète** est une variable qui prend des valeurs séparées $x_1$, $x_2$, ... , chacune avec une certaine probabilité.
La variable est discrète et finie si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

C'est l'équivalent d'un caractère quantitatif discret en statistiques. En particulier, on obtient une variable aléatoire en considérant les issues d'une expérience aléatoire dont les résultats sont numériques et en nombre fini.

On désigne habituellement une variable aléatoire avec une majuscule : $X$, $Y$, etc. La probabilité que $X$ prenne la valeur $x_i$ se note $P(X = x_i)$ (ou parfois $P(x_i)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.)

**Définition 2**
La **loi de probabilité** d'une v.a. $X$ est l'application qui à toute valeur $x_i$ prise par $X$ associe la probabilité $P(X = x_i)$. On la représente habituellement à l'aide d'un tableau.

| Valeur prise | $x_1$ | $x_2$ | ... |
|---|---|---|---|
| Probabilité de cette valeur | $P(X = x_1)$ | $P(X = x_2)$ | ... |

### 1.2 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

L'espérance est l'équivalent de la moyenne en statistiques, les fréquences étant remplacées par les probabilités.

Voyons d'abord le cas d'une variable finie.

**Définition 3**
Soit $X$ une variable aléatoire finie prenant les valeurs $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$. **L'espérance** de $X$, notée $E(X)$ est le nombre :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$$

Autrement dit, on multiplie chaque valeur par sa probabilité et on fait la somme.

Pour alléger les notations, posons : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc. On obtient :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

**Définition 4**
**La variance** de $X$, notée $V(X)$ est le nombre :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2$$

Remarque : $V(X)$ est un nombre positif. En effet, les carrés sont positifs et les probabilités $p_i$ sont des nombres positifs.

**Définition 5**
**L'écart-type** de $X$, noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Si la variable n'est pas finie, on remplace les sommes précédentes par une somme infinie, et il se pose alors la question de sa convergence (que nous n'aborderons pas).

### 1.3 Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

On peut constituer une expérience aléatoire par la succession de plusieurs expériences aléatoires.

Si le résultat de l'une quelconque de ces expérience ne dépend pas du résultat des autres expériences, on dit qu'elles sont indépendantes les unes des autres et on parle alors de répétition d'expériences **indépendantes**.

**Propriété 1** (admise)
Dans le cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste (ordonnée) d'issues est le **produit** des probabilités de chaque issue :

$$P(a_1\,;a_2\,;...\,;a_n) = P(a_1) \times P(a_2) \times ... \times P(a_n)$$

On peut représenter une succession d'expériences aléatoires par un arbre, et la probabilité d'une liste est le produit des probabilités rencontrées sur le parcours correspondant.

## 2 Loi uniforme discrète

**Définition 6**
Soit $n$ un entier naturel non nul. Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme discrète à valeurs dans l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ si pour tout $k \in \{1\,;2\,;...\,;n\}$ : $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Cette loi traduit une situation d'équiprobabilité (chaque issue a la même probabilité). L'exemple classique est celui du lancer d'un dé équilibré à $n$ faces.

**Propriété 2**
Si $X$ suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;...\,;n\}$, alors l'espérance de $X$ est : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

## 3 Épreuve de Bernoulli

**Définition 7**
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues. On note traditionnellement ces deux issues $S$ (succès) et $E$ (échec). On note $p = P(S)$ la probabilité d'un succès.

**Exemples** : on lance une pièce ; on tire une boule parmi des boules de deux couleurs, etc.

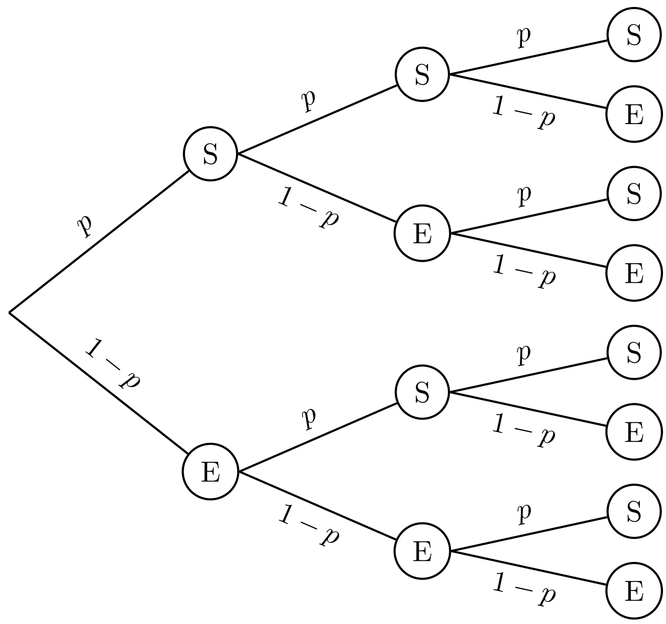
**Définition 8**
On considère une épreuve de Bernoulli, avec $p = P(S)$. La variable $X$ qui vaut 1 pour un succès et 0 pour un échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p$.

**Propriété 3**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
L'espérance de $X$ est : $E(X) = p$.
L'écart-type de $X$ est : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

# 4 Schéma de Bernoulli

**Définition 9**
Un **schéma de Bernoulli** est une expérience qui est la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*. On note $n$ le nombre d'épreuves répétées.

**Illustration avec $n = 3$ :**




**Exemples** :

1. On lance 20 fois de suite la même pièce.
2. On tire 10 fois de suite une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs et on la remet à chaque fois dans l'urne (tirage avec remise).

**Remarque** : on peut schématiser une issue par une liste ordonnée de $n$ lettres « $S$ » ou « $E$ ».

# 5 Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli (répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes), et la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les résultats de ces expériences. La raison pour laquelle on s'intéresse à ce type d'expérience est qu'il décrit la constitution d'un **échantillon** d'individus dans une population, et permet donc de faire un lien entre probabilités et statistiques.

## 5.1 Définition

**Définition 10**
On réalise un schéma de Bernoulli en répétant $n$ fois une épreuve de Bernoulli (une expérience à deux issues) de paramètre $p$. Soit $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus. Les valeurs prises par $X$ sont donc tous les entiers de 0 à $n$.
On appelle **loi binomiale** de paramètres $n$ et $p$, et on note $\mathcal{B}(n;p)$ la loi de probabilité de $X$.

Elle associe à tout entier $k \in \{0\,;1\,;\dots\,;n\}$ la probabilité d'obtenir $k$ succès. Cette probabilité dépend du nombre $n$ de répétitions et de la probabilité $p$ d'un succès.

**Exemple** : on jette une pièce trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois pile ?

Il y a trois manière d'obtenir 2 piles : PPF, PFP et FPP. La probabilité de chacun de ces événements est : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ puisque les épreuves sont indépendantes. La probabilité d'obtenir 2 piles est donc de $\frac{3}{8}$.

La variable aléatoire $X$, qui compte le nombre de piles, suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{2}$.
Le calcul précédent montre que $P(X=2)=\frac{3}{8}$.

## 5.2 Les coefficients binomiaux

On construit l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli de paramètre $n$ et $p$ (rappel : $n$ est le nombre de répétitions et $p$ la probabilité d'un succès au cours d'une épreuve de Bernoulli.) Le nombre de chemins correspondant à $k$ succès s'appelle « coefficient binomial $k$ parmi $n$ » ou plus simplement « $k$ parmi $n$ » et se note $\displaystyle\binom{n}{k}$.

**Remarque** : De façon équivalente, on peut dire que parmi les mots de $n$ lettres qu'on peut fabriquer en utilisant seulement les lettres « $S$ » et « $E$ », $\binom{n}{k}$ est le nombre de mots comportant exactement $k$ fois la lettre « $S$ ».

## 5.3 Propriétés des coefficients binomiaux

**Propriété 4**
Soit $n$, $k$ deux entiers naturels avec $k \leq n$..

1. $\displaystyle\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
2. $\displaystyle\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
3. $\displaystyle\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
4. Formule de Pascal : Pour $1 \leq k \leq n-1$, $\displaystyle\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

## 5.4 Triangle de Pascal

Pour $n \leq 10$, la formule de Pascal permet de calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche. On présente le calcul à l'aide du tableau ci-dessous :

- on place des 1 sur la première colonne et la diagonale ;
- on obtient un autre nombre du tableau en ajoutant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente.

Et ainsi de suite...

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

### 5.5 Formule générale de la loi binomiale

Soit $X$ une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres $n$ et $p$.

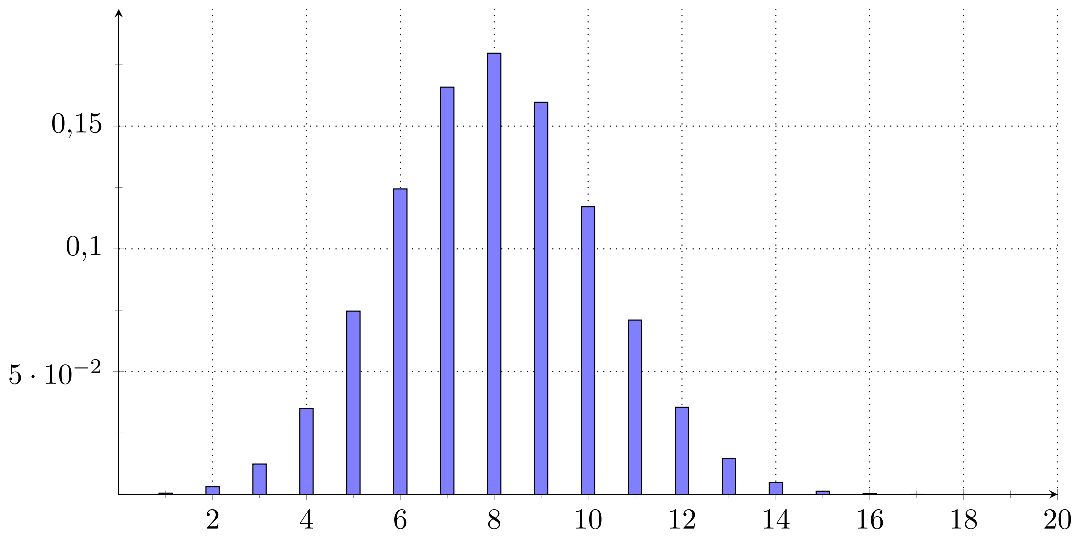
**Propriété 5**
Pour tout entier $k \in [0\,;n]$, on a :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

**Démonstration :**
Chaque liste formée de $k$ succès, et donc de $n-k$ échecs, a pour probabilité : $p^k(1-p)^{n-k}$.

Le nombre de telles listes est égal au nombre de parcours sur l'arbre comportant $k$ succès parmi les $n$ résultats. Il y a $\binom{n}{k}$ parcours de ce type. Donc $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. ■

Illustration avec $n$=20 ; $p$=0,4 :




### 5.6 Espérance et écart-type

Soit $X$ une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres $n$ et $p$.

**Propriété 6**
L'espérance de $X$ est : $E(X)=np$. L'écart-type de $X$ est : $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

## 6 Loi géométrique

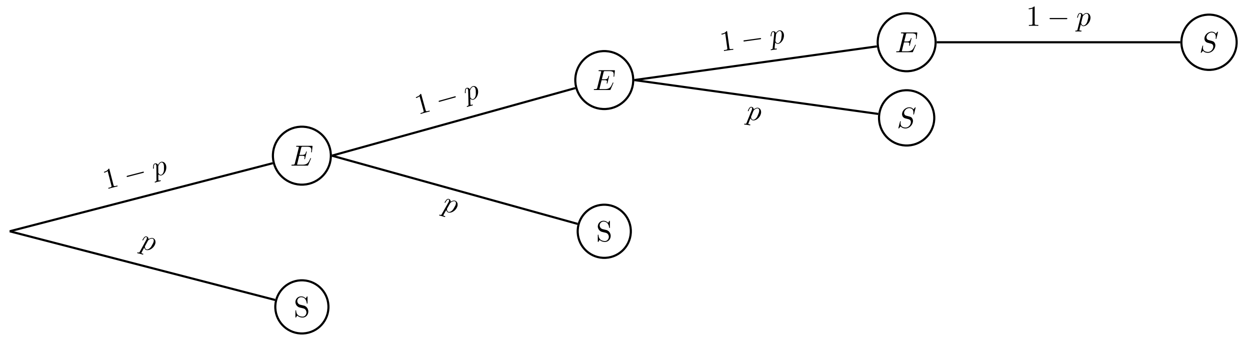
### 6.1 Définition

**Définition 11**
On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p$. On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. Soit $X$ la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Les valeurs prises par $X$ sont donc tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

On dit que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

**Remarque :** ici, $X$ est une variable aléatoire discrète mais non finie.

Exemple avec $k = 4$ :

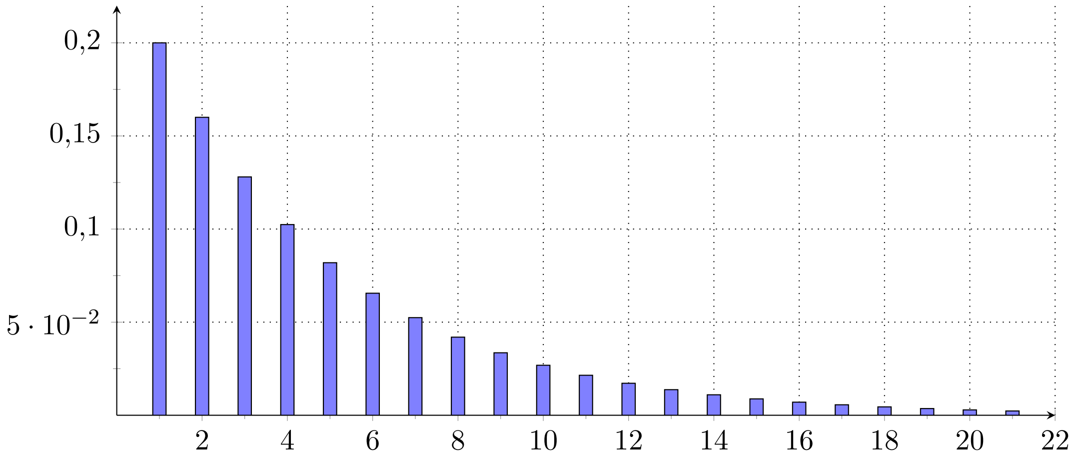



**Propriété 7**
Pour tout entier naturel non nul $k$, la probabilité que $X$ prenne la valeur $k$ est alors : $P(k) = (1-p)^{k-1}p$.

En effet, il y a un seul parcours possible sur l'arbre : rencontrer $k-1$ échecs et un succès à la fin.

On en déduit que : $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$ et $P(X > k) = (1-p)^k$.

Illustration avec $p$=0,2




## 6.2 Espérance

Soit $X$ une v.a. suivant la loi géométrique de paramètre $p$.

**Propriété 8**
L'espérance de $X$ est : $E(X) = \frac{1}{p}$.

## 6.3 Propriété caractéristique : loi sans mémoire

La loi géométrique vérifie la propriété suivante : pour tous entiers $k$ et $a$, on a : $P_{X>k}(X > k+a) = P(X > a)$, autrement dit cette probabilité est indépendante de $k$.

En effet : $P_{X>k}(X > k+a) = \dfrac{P(X > k+a)}{P(X > k)} = \dfrac{(1-p)^{k+a}}{(1-p)^k} = (1-p)^{k+a-k} = (1-p)^a = P(X > a)$

Cela signifie que la probabilité que l'on doive encore effectuer au moins $a$ tirages avant d'obtenir un succès est indépendante du nombre de tirages déjà effectués.

Par exemple, si on lance un dé, la probabilité d'obtenir un six au prochain lancer est la même, quel que soit le nombre de lancers déjà effectués.

On dit que la loi géométrique est une loi *sans mémoire*. Intuitivement, peu importe ce qui s'est passé avant ; le calcul des probabilités n'est pas modifié.