Corrigé du surveillé n° 1

Exercice 1 :

1. Cherchons les solutions h de l'équation homogène associée : $y' = 5y$
   On sait que que ces solutions sont de la forme : $h(x) = Ce^{5x}$ où C est une constante réelle.

   Cherchons à présent une solution constante k de l'équation (E).
   Puisque k est une fonction constante, sa dérivée k' est la fonction nulle, donc, pour tout x :
   $0 = 5k(x) - 2$ donc : $k(x) = \dfrac{2}{5}$.

   On sait que les fonctions f solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant les solutions de l'équation sans second membre à la solution constante de (E).

   Ainsi : $f(x) = Ce^{5x} + \dfrac{2}{5}$.
2. On a ici : $f(0) = 8$
   En remplaçant : $Ce^{5\times 0} + \dfrac{2}{5} = 8$
   $Ce^{0} + \dfrac{2}{5} = 8$
   $C = 8 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{38}{5}$
   Donc : $f(x) = \dfrac{38}{5}e^{5x} + \dfrac{2}{5}$ ou : $f(x) = 7{,}6e^{5x} + 0{,}4$

Exercice 2 :

1. $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ et l'image de 0 est 5.
   Les primitives de f sont les fonctions F de la forme : $F(x) = x^4 + 3x^2 + 3x + C$

   On a $F(0) = 5$, soit : $0^4 + 3\times 0^2 + 3\times 0 + C = 5$ donc $C = 5$

   Ainsi : $F(x) = x^4 + 3x^2 + 3x + 5$

2. $f(x) = 10e^{5x}$ et l'image de 0 est 3.
   Les primitives de f sont les fonctions F de la forme : $F(x) = 2e^{5x} + C$ car on se rappelle que la dérivée de $x \mapsto e^{5x}$ est $x \mapsto 5e^{5x}$.

   On a $F(0) = 3$, soit : $2e^{5\times 0} + C = 3$ donc $2 + C = 3$ donc $C = 1$

   Ainsi : $F(x) = 2e^{5x} + 1$

3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ et l'image de 9 est 10.
   Les primitives de f sont les fonctions F de la forme : $F(x) = 4\sqrt{x} + C$ car on se rappelle que la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   On a $F(9) = 10$, soit : $4\sqrt{9} + C = 10$ donc $4\times 3 + C = 10$ donc $12 + C = 10$ donc $C = -2$.

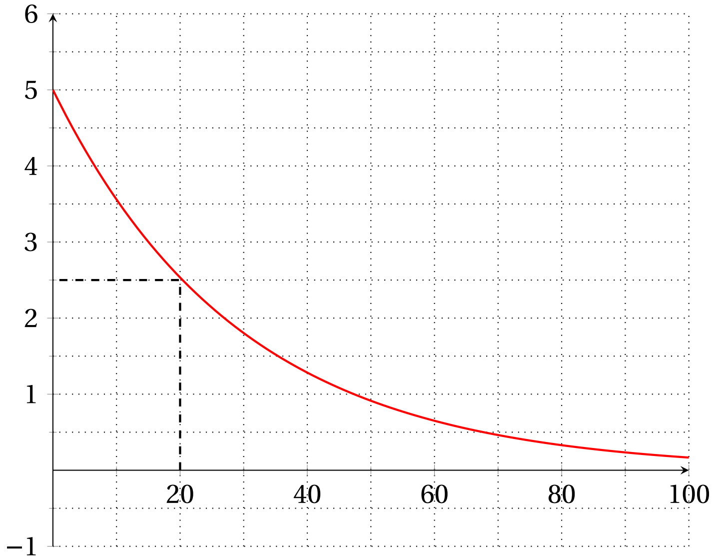
   Ainsi : $F(x) = 4\sqrt{x} - 2$

Exercice 3 :

1. L'équation différentielle donnée se réécrit sous la forme : $y' = -0{,}034y$
   D'après le cours, les solutions sont les fonctions g de la forme $g(x) = Ce^{-0{,}034x}$

2. On a : $g(0) = C\text{e}^{-0,034\times 0} = 5$ donc $C = 5$. On a bien : $g(x) = 5\text{e}^{-0,034x}$.

3. Graphiquement :



On voit que c'est pour $x = 20$, soit 20 km de fibre que la puissance du signal est divisée par 2.

Vérifions : $g(20) = 5\text{e}^{-0,034\times 20} \simeq 2,53$

Ça marche.

4. $g(100) = 5\text{e}^{-0,034\times 100} \simeq 0,17$.
Donc $g(100) > 0,08$. Le signal sera donc encore détecté au bout de 100 km de propagation.

5. On sait que si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{ax} = 0$. Donc la limite est 0.

Ce résultat peut s'interpréter ainsi dans le contexte : Au bout d'une très longue distance parcourue, la puissance du signal devient voisine de zéro.