Devoir surveillé n° 1

Option complémentaire mathématiques

Exercice 1 (4 points) :

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = 5y - 2$.

1. Donner la forme générale des fonctions f solutions de (E).
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition : $f(0) = 8$.

Exercice 2 (6 points) :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive de la fonction f qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ et l'image de 0 est 5.
2. $f(x) = 10\mathrm{e}^{5x}$ et l'image de 0 est 3.
3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ et l'image de 9 est 10.

Exercice 3 (10 points) :

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.

On sait que :

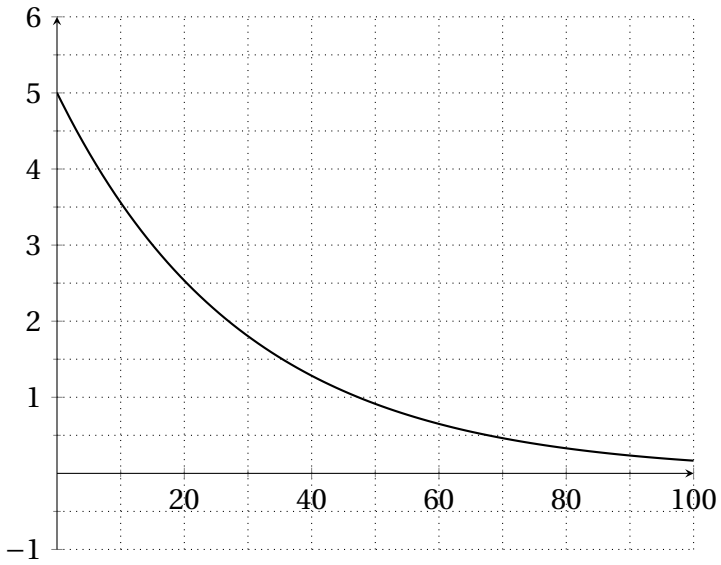
- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 5 mW;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW;

La puissance en mW du signal le long d'une fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle

$$y' + 0{,}034y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}034y = 0$.
2. Sachant que $g(0) = 5$, vérifier que g est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 5\mathrm{e}^{-0{,}034x}$.

   La fonction g est représentée ci-dessous.



3. Déterminer graphiquement la distance au bout de laquelle la puissance du signal est divisée par 2. Vérifier par le calcul.
4. Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?
5. Donner sans justification la limite de la fonction g en $+\infty$. Comment interpréter ce résultat ?