Primitives et équations différentielles

1 Rappels sur la fonction exponentielle

Définition 1
Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, pour laquelle l'image de 0 est 1. On l'appelle la **fonction exponentielle**, notée exp.

Ainsi : $\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$

On note : **e** l'image de 1 par la fonction exponentielle et : $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Propriété 1
Pour tous réels a et b, on a :

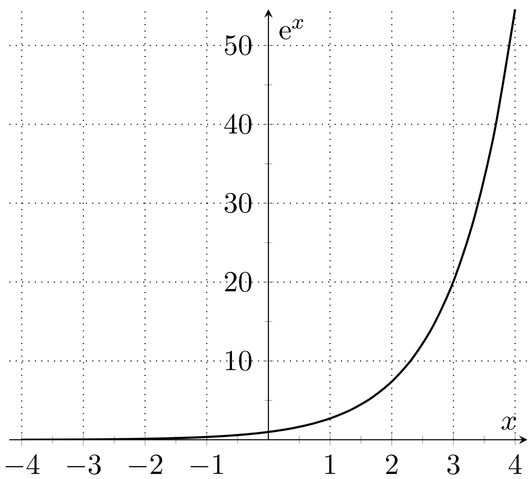
1. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
2. $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

Propriété 2
La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe :



2 Équations différentielles : introduction

Il que l'étude d'un phénomène montre un lien entre une fonction et sa dérivée. Par exemple, si un condensateur se décharge dans une résistance, la tension v à ses bornes est proportionnelle à sa dérivée car on a à la fois $v = Ri$ et $i = -C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (i étant l'intensité, R la valeur de la résistance et C la capacité du condensateur).

Ce genre d'équation, où intervient une fonction et sa dérivée s'appelle une **équation différentielle**. Il faut remarquer tout de suite que *l'inconnue* de cette équation est une *fonction*. Ainsi, une solution d'une équation différentielle est une fonction, pas un nombre. Mais comme pour les équations habituelles, il se peut qu'il y ait une, plusieurs ou aucune solution.

Quand la variable est connue, elle est souvent omise. On écrira par exemple : $y' = ay$ pour : $y'(x) = ay(x)$ pour tout x ou $y' = f$ pour $y'(x) = f(x)$ pour tout x. La variable est en général notée x ou t, en particulier quand elle représente le temps.

Exemples :

1. $y' = 0$. On cherche une fonction dont la dérivée soit nulle. On sait que les fonctions solutions sont les fonctions constantes. Il y en a une infinité.
2. $y' = y$. On cherche une fonction qui soit égale à sa dérivée. On connaît au moins une solution : il s'agit de la fonction exponentielle. On va voir qu'il en existe ici aussi une infinité.
3. $y' = 2\dfrac{y}{x}$. D'abord, une solution ne peut pas être définie pour $x = 0$.
   On voit que la restriction à $]0\,;+\infty[$ de la fonction « carré » est solution. Il y en a d'autres, par exemple la restriction à $]0\,;+\infty[$ de la fonction nulle.

Dans un premier temps, on s'intéresse à des équations différentielle du type $y' = f$.

3 Primitive d'une fonction continue

3.1 Définition

Définition 2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F, définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Propriété 3
Soit f une fonction sur I.
Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité. Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies par : $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Théorème 1 (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

3.2 Propriétés et primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de f sur I ; C est une constante réelle.

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0;+\infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$

F, U, V sont des primitives respectivement de f, u, v ; k est un réel.

$f(x)$	$F(x)$	Condition
$u(x)+v(x)$	$U(x)+V(x)+C$	
$k\cdot u(x)$	$k\cdot U(x)+C$	
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))+C$	$u(x)\in]0;+\infty[$
$u'(x)\cdot \mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}+C$	
$u(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\cdot U(ax+b)+C$	

Propriété 4 (condition initiale)
Soit f, une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Parmi toute les primitives de f sur I, une seule vérifie la « condition initiale » $(x_0\,;y_0)$, c'est à dire : il existe une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

On s'intéresse à présent à un autre type simple d'équation différentielle.

4 Équations différentielles de la forme *y'=ay+b*

4.1 Cas particulier : l'équation « homogène » *y'=ay*

Propriété 5
On admet que les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions f telles que : $f(x)=C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle.

Il est facile de vérifier que les fonctions de ce type sont solutions. En effet, d'après le cours de première, si a et b sont des nombres réels et si $f(x)=g(ax+b)$, alors $f'(x)=ag'(ax+b)$.

On applique cette formule à $f(x)=C\mathrm{e}^{ax}$ et on trouve $f'(x)=Ca\mathrm{e}^{ax}=af(x)$.

4.2 Le cas général

Méthode : on cherche d'abord une solution constante : $f(x)=k$.

On a alors $f'(x)=0$, donc $af(x)+b=0$, ce qui permet de trouver la valeur de k.

Pour trouver les autres solutions, on ajoute à f les solutions de l'équation homogène $y'=ay$.

En effet, si g est solution de l'équation homogène, on a : $g'(x)=ag(x)$.

Par conséquent : $f'(x)+g'(x)=af(x)+b+ag(x)$.

Autrement dit, la fonction $f+g$ vérifie : $(f+g)'(x)=a(f+g)(x)+b$ et $f+g$ est donc une autre solution de l'équation différentielle de départ.

Retenons le schéma : $\boxed{\text{solution de } y'=ay+b}=\boxed{\text{solution constante}}+\boxed{\text{solution de } y'=ay}$.

Exemple : Soit (E) l'équation $y'=2y+5$.

Cherchons une solution h constante. Alors $2h(x)+5=0$, donc $h(x)=-\dfrac{5}{2}$

Cherchons les solutions g de l'équation homogène : $y'=2y$. Elles sont de la forme : $g(x)=C\mathrm{e}^{2x}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont ainsi les fonctions f telles que : $f(x)=C\,\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{5}{2}$.

Vérifions que c'est juste : $f'(x) = 2Ce^{2x}$ et : $2f(x) + 5 = 2\left(Ce^{2x} - \dfrac{5}{2}\right) + 5 = 2Ce^{2x}$. On trouve la même chose. Ça marche.

> **Propriété 6** (condition initiale)
> Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
> Parmi toute les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur I, une seule vérifie la « condition initiale » $(x_0 \,; y_0)$, c'est à dire :
> il existe une seule fonction f solution de $y' = ay + b$ sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple : Soit (E) l'équation $y' = 2y+5$. Déterminer la solution f vérifiant la condition initiale : $f(0) = -3$.

On a vu que f est de la forme : $f(x) = C\,e^{2x} - \dfrac{5}{2}$.

On a donc : $f(0) = Ce^{2\times 0} - \dfrac{5}{2} = C - \dfrac{5}{2} = -3$; donc $C = -3 + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

(On a tenu compte du fait que $e^0 = 1$).

Ainsi : $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{5}{2}$

5 Application

Thème : modèles d'évolution. Modèle de Verhulst continu, page 256.