

Suites

1 Rappels de première

Définition 1

Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres réels, numérotés par des *indices* qui sont des nombres entiers naturels consécutifs 0, 1, 2, ...

Si la suite est désignée par la lettre u , à chaque entier naturel n est associé un réel, noté u_n appelé terme d'indice (ou de *rang*) n , de la suite.

La notation u_n se lit « u indice n ».

La notation (u_n) , entre parenthèses, signifie la suite entière (tous les termes).

Représentation graphique :

Comme pour une fonction, on peut représenter graphiquement une suite numérique (u_n) par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$, c'est une représentation graphique « discrète », c'est à dire « non continue ».

Mode de génération :

1. Formule explicite : On calcule u_n directement à partir de n .
2. Formule de récurrence : À partir d'un terme u_n quelconque, on calcule le terme suivant, u_{n+1} . Il faut donner un premier terme pour commencer le calcul, c'est en général u_0 .

Remarque : Il y a aussi des suites qui ne se définissent ni par une formule explicite ni par une relation de récurrence. Par exemple, la suite des nombres premiers ou des décimales de π .

Sens de variation - Majoration et minoration

Définition 2

Soit p un entier naturel. On dit que :

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p : u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p : u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p : u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée.

Suites arithmétiques et géométriques :

Définition 3

Une suite est arithmétique si chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant une constante r appelée *raison* de la suite.

Une suite est géométrique si chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q appelée *raison* de la suite.

- Suite arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Suite géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Propriétés d'une suite arithmétique :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
2. $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$
3. (Conséquence) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors :
$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Propriétés d'une suite géométrique :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

$$2. 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3. (Conséquence) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

2 Limite d'une suite - Définitions

Définition 4

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tous les termes u_n sont aussi grands qu'on veut à condition de choisir n suffisamment grand.

Quel que soit le nombre A (même très grand), tous les termes u_n de la suite sont supérieurs ou égaux à A à partir d'un certain rang.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi, tous les termes de la suites sont supérieurs à 1000 à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont supérieurs à 1 000 000 à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi grands qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.

Définition 5

La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si tous les termes u_n sont aussi petits (négatifs) qu'on veut à condition de choisir n suffisamment grand.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, tous les termes de la suites sont inférieurs à -1000 à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont inférieurs à $-1\,000\,000$ à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi petits (aussi négatifs) qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.

Définition 6

La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tous les termes u_n sont aussi proches de ℓ qu'on veut à condition de choisir n suffisamment grand.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Autrement dit : quelle que soit la distance r strictement positive (mais aussi petite qu'on veut), tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ à partir d'un certain rang.

Ainsi, tous les termes de la suite sont situés dans $]\ell - 0,001; \ell + 0,001[$ à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont dans $]\ell - 0,000001; \ell + 0,000001[$ à partir d'un certain rang, etc.

Exemples :

1. Posons $u_n = 3n$. On constate que $3n$ devient aussi grand qu'on veut, à condition de choisir n assez grand. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$.

2. Posons $u_n = \frac{1}{n}$. On constate que $\frac{1}{n}$ devient aussi proche de 0 qu'on veut, à condition de choisir n assez grand. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. On pose $u_n = (-1)^n$. On constate que $(-1)^n$ vaut alternativement 1 ; -1 ; 1 ; -1, etc. suivant que n est pair ou impair. Dans ce cas, (u_n) n'a pas de limite : en effet, u_n ne prend pas de grandes valeurs, mais ne se rapproche pas non plus d'aussi près qu'on veut d'un nombre donné.

Remarque : si une suite (u_n) a une limite, celle-ci est nécessairement unique. En effet, supposons que (u_n) admette comme limites deux nombres différents, a et b . D'après la définition, cela signifie que u_n devient

aussi proche qu'on veut à la fois de a et de b , à condition de choisir n suffisamment grand. Cela implique que a et b sont aussi proches qu'on veut, et donc qu'ils sont égaux.

Vocabulaire : Une suite est **convergente** si elle a une limite finie. Elle est **divergente** si elle a une limite infinie ou pas de limite du tout.

3 Propriétés des limites

Limites de référence :

Propriété 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Opérations et limites :

Soient ℓ et m deux nombres ; soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Propriété 2

Somme :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n =$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$\ell + m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n =$	m	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times m$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes.

Inverse :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^-	0^+	0
alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

Comportement d'une suite géométrique :

Propriété 3

Soit q un nombre réel positif.

- Si $0 \leq q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exemples :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,2^n = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,87^n = 0.$$

Application : Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in [0; 1[$. On pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

D'après les rappels de première, on peut écrire : $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Comme $q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$.

Exemple : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Alors $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Autrement dit : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$.

4 Limite et comparaison

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) , trois suites.

Théorème 1

Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

On utilise en général ce théorème en comparant la suite donnée à une suite de référence.

Exemple : étudier la limite éventuelle de $u_n = n^2 + e^{\sqrt{n}}$.

Comme $e^{\sqrt{n}} > 0$, alors $u_n > n^2$. Comme n^2 tend vers $+\infty$, alors u_n tend aussi vers $+\infty$.

Théorème 2 (« théorème des gendarmes »)

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (u_n) et (w_n) sont convergentes, de même limite ℓ , alors (v_n) est elle aussi convergente et de limite ℓ .

Ce théorème s'applique bien lorsqu'on étudie le produit de deux suites dont l'une est bornée et l'autre tend vers 0. Suites bornées classiques : $(-1)^n$, $\sin(n)$, $\cos(n)$...

Exemple : étudier la limite éventuelle de $\frac{\cos(n)}{n}$.

On pose : $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = \frac{\cos(n)}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$.

Comme on a pour tout n : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, alors : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$, soit $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

5 Suites arithmético-géométriques

Une suite arithmético-géométrique est définie par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = qu_n + r$ où q et r sont deux réels.

Si $q = 1$, on retrouve une suite arithmétique ; si $r = 0$, on retrouve une suite géométrique.

Si $q \in [0; 1[$, la suite admet une limite (quelle que soit la valeur de r).