Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

1. L'ensemble des diviseurs de 20 est : $\{-20\,;-10\,;-5\,;-4\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;4\,;5\,;10\,;20\}$
2. **Méthode 1 : Par récurrence.**

   Soit la proposition (dépendant de n) : $9^n + 7$ est divisible par 8.

   La proposition est vraie pour $n = 0$ car $9^0 + 7 = 8$.

   D'autre part, elle est héréditaire car : si $9^n + 7$ est divisible par 8,

   alors : $9^{n+1} + 7 = 9^n \times 9 + 7 = 9^n \times 8 + 9^n + 7$.

   Or, $9^n \times 8$ est un multiple de 8 et $9^n - 7$ est aussi un multiple de 8, d'après l'hypothèse de récurrence.

   Donc $9^{n+1} + 7$ est un multiple de 8 (car somme de deux multiples de 8).

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Méthode 2 : par utilisation de la factorisation de $a^n - b^n$.

   On sait que $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

   ce qui s'écrit aussi : $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$

   On applique cette formule avec $a = 9$ et $b = 1$: $9^n - 1^n = (9-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 9^{n-1-k} \times 1^k$

   Soit : $9^n - 1 = 8\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 9^{n-1-k}$

   Posons : $k = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 9^{n-1-k}$; k est un nombre entier, donc : $9^n - 1 = 8k$ est un multiple de 8.

   Donc $9^n + 7 = 9^n - 1 + 8$ est aussi un multiple de 8.

3. Soit n tel que $n+2$ divise $n+7$; de façon évidente, $n+2$ divise aussi $n+2$. Donc $n+2$ divise $n+7-(n+2) = 5$.

   Ainsi, $n+2$ est un diviseur de 5, donc $n+2$ appartient à l'ensemble $\{-5\,;-1\,;1\,;5\}$.

   On en déduit : $n \in \{-7\,;-3\,;-1\,;3\}$. On vérifie que chacune de ces valeurs est bien une solution :

   - Si $n = -7$, $n+2 = -5$ et $n+7 = 0$; on voit que -5 divise bien 0.
   - Si $n = -3$, $n+2 = -1$ et $n+7 = 4$; on voit que -1 divise bien 4.
   - Si $n = -1$, $n+2 = 1$ et $n+7 = 6$; on voit que 1 divise bien 6.
   - Si $n = 3$, $n+2 = 5$ et $n+7 = 10$; on voit que 5 divise bien 10.

4. Soit n tel que $3n+2$ divise $5n+4$; de façon évidente, $3n+2$ divise aussi $3n+2$. Donc $3n+2$ divise n'importe quelle combinaison linéaire à coefficients entiers de $3n+2$ et $5n+4$.

   En particulier, $3n+2$ divise $-5 \times (3n+2) + 3 \times (5n+4) = 2$.

   Ainsi, $3n+2$ est un diviseur de 2, donc $3n+2$ appartient à l'ensemble $\{-2\,;-1\,;1\,;2\}$.

   - Si $3n+2 = -2$, alors $3n = -4$: c'est impossible.
   - Si $3n+2 = -1$, alors $3n = -3$ et donc $n = -1$.
   - Si $3n+2 = 1$, alors $3n = -1$: c'est impossible.
   - Si $3n+2 = 2$, alors $3n = 0$ et donc $n = 0$.

   Ainsi, les deux seules solutions sont $n = -1$ et $n = 0$.

Exercice 2 :

1. $78 = 1 \times 54 + 24$

   $54 = 2 \times 24 + 6$

   $24 = 4 \times 6 + 0$

   Le PGCD de 78 et 54 est le dernier reste non nul, c'est 6. On trouve donc $d = 6$.
2. On isole à chaque étape le reste de la division :

   $24 = 78 - 54$

   $6 = 54 - 2 \times 24$

   On remplace en partant à l'envers :

   $6 = 54 - 2 \times (78 - 54) = 3 \times 54 - 2 \times 78.$

   On trouve donc : $(a\,;b) = (-2\,;3)$. La vérification est facile.

   On peut aussi, bien sûr, diviser l'équation par 6 : $78a + 54v = 6$ équivaut à : $13a + 9b = 1$. La méthode est identique, les calculs sont un (tout) petit peu plus simples.

Exercice 3 :

1. Rappelons le résultat du cours : Une équation du type $ax + by = c$ a des solutions $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple du PGCD de a et b.
   a) $6x + 8y = 4$.

   Le PGCD de 6 et 8 est 2 et 2 divise 4. Donc cette équation a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

   b) $9x - 12y = 50$.

   Le PGCD de 9 et -12 est 3 et 3 ne divise pas 50. Donc cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

   c) $10^{50}x + 3^{80}y = 17$.

   Les diviseurs premiers de 10^{50} sont 2 et 5.

   Le seul diviseur premier de 3^{80} est 3.

   Donc 10^{50} et 3^{80} n'ont aucun diviseur premier commun. Donc ils sont premiers entre eux.

   Leur PGCD (c'est 1) divise tout ce qu'on veut. Donc cette équation a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. a) On trouve facilement : $9u + 14v = 1$ pour $u = -3$ et $v = 2$.

   Donc on peut prendre $x_0 = -3 \times 4 = -12$ et $y_0 = 2 \times 4 = 8$.

   On vérifie que : $9 \times (-12) + 14 \times 8 = 4$.

   b) On a : $9x + 14y = 4$

   et : $9x_0 + 14y_0 = 4$, donc en soustrayant membre à membre :

   $9x + 14y - 9x_0 - 14y_0 = 4 - 4$

   soit : $9(x - x_0) = -14(y - y_0)$

   c) L'égalité précédente montre que 9 divise $14(y - y_0)$.

   D'autre part, 9 et 14 sont premiers entre eux.

   Par conséquent, d'après la théorème de Gauss, 9 divise $y - y_0$.

   On montre de même que 14 divise $x - x_0$.

   On peut donc poser : $y - y_0 = 9k$, où k est un entier relatif.

   On obtient : $9(x - x_0) = -14 \times 9k$ soit $x - x_0 = -14k$.

   Les solutions de l'équation(E) sont donc les couples $(x\,;y)$ de la forme $(-12 - 14k\,;8 + 9k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 :

1. On trouve : $4410 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$.
2. Soit a tel que a^2 divise 4410. Les diviseurs premiers possibles de a sont 3 et 7 ; car si a admettait un autre diviseur premier p, alors p^2 diviserait 4410, ce qui n'est pas le cas.

   Comme a est le plus grand carré divisant 4410, $a = 3 \times 7 = 21$.