Correction du devoir surveillé n°2

Exercice 1:

1.) $\overline{z} + 3i = 2z - 1$

On pose : $z = x + iy$; $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{z} = x - iy$.

On obtient :

$x - iy + 3i = 2x + 2iy - 1$

On sépare partie réelle et partie imaginaire :

$\begin{cases} x = 2x - 1 \\ -y + 3 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Donc : $\boxed{z = 1 + i}$

2.) $z\overline{z} + z - 3 = i$

Même méthode.

$(x+iy)(x-iy) + x + iy - 3 = i$

$x^2 + y^2 + x + iy - 3 = i$.

$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

On remplace :

$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

On résout la première équation :

On peut calculer Δ ou remarquer que 1 est une racine évidente. Comme le produit des racines est égal à $\frac{c}{a}$, l'autre racine est -2, ce qui se vérifie facilement.

On obtient donc 2 solutions : $\boxed{z = 1 + i}$ et $\boxed{z = -2 + i}$

Exercice 2:

1a) $Z_1 = 5e^{-i3\pi/4} = 5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

1b) $Z_2 = 7e^{i3\pi/2} = 7\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 7(0 - i) = \boxed{-7i}$

2a.) $z_3 = -5+5i = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \boxed{5\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}}$

2b.) $z_4 = 2\sqrt{3}+6i = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \boxed{4\sqrt{3}\,e^{i\pi/3}}$

Exercice 3 :

1.) $|2z-6-2i| = 6$ équivaut à :

$|2(z-3-i)| = 6$

$|2|\,|z-3-i| = 6$

$2\times|z-3-i| = 6$

$|z-(3+i)| = 3$ Soit A le point d'affixe $3+i$.

alors : $|z-z_A| = 3$ équivaut à : $AM = 3$.

Donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre A et de rayon 3.

2.) $|z-2| = |z-2i|$.

Soient A : le point d'affixe 2
et B : le point d'affixe $2i$.

Alors : $|z-z_A| = |z-z_B|$

équivaut à : $AM = BM$.

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 4 :

1.) $z^2-10z+74 = 0$

$\Delta = (-10)^2-4\times1\times74 = -196 = (14i)^2$

Donc, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{10-14i}{2} = \boxed{5-7i}$

et $z_2 = \frac{10+14i}{2} = \boxed{5+7i}$

2.) $9z^2-6z+2 = 0$

$\Delta = (-6)^2-4\times9\times2 = -36 = (6i)^2$

L'équation admet donc deux solutions :

$z_1 = \frac{-6-6i}{2\times9} = \boxed{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i}$ et $z_2 = \frac{-6+6i}{2\times9} = \boxed{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i}$

Exercice 5 :

$$z_0 = 5 \qquad z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z_n .$$

1.) On passe de z_n à z_{n+1} en multipliant toujours par le même nombre, donc la suite (z_n) est géométrique, de raison

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}$$

2.) On en déduit : $z_n = z_0 \times q^n = 5 \times \left(e^{i\pi/3}\right)^n = \boxed{5 \times e^{in\pi/3}}$

Le module de z_n est donc : $|z_n| = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et un argument de z_n est : $\arg(z_n) = \frac{n\pi}{3}$.

3.) Comme $|z_n| = 5$ pour tout n, $OM_n = 5$.

Donc tous les points M_n appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.

D'autre part, on a pour tout n :

$$\left(\overrightarrow{OM_n} ; \overrightarrow{OM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Donc les points M_n sont les sommets d'un hexagone régulier.

4)