Correction du devoir surveillé n° 1

Mathématiques expertes - 05.11.2025

Exercice 1 :

$z+z'=3+2\text{i}-2+4\text{i}=1+6\text{i}$

$z\times z'=(3+2\text{i})(-2+4\text{i})=-6+12\text{i}-4\text{i}+8\text{i}^2=-6+12\text{i}-4\text{i}-8=-14+8\text{i}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3+2\text{i}}=\dfrac{3-2\text{i}}{(3+2\text{i})(3-2\text{i})}=\dfrac{3-2\text{i}}{3^2-(2\text{i})^2}=\dfrac{3-2\text{i}}{9+4}=\dfrac{3-2\text{i}}{13}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\text{i}$

$\dfrac{z}{z'}=\dfrac{3+2\text{i}}{-2+4\text{i}}=\dfrac{(3+2\text{i})(-2-4\text{i})}{(-2+4\text{i})(-2-4\text{i})}=\dfrac{-6-12\text{i}-4\text{i}-8\text{i}^2}{(-2)^2-(4\text{i})^2}=\dfrac{-6-12\text{i}-4\text{i}+8}{4-16\text{i}^2}=\dfrac{2-16\text{i}}{20}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{4}{5}\text{i}$

$\overline{z}^2=(3-2\text{i})^2=3^2-2\times3\times2\text{i}+(2\text{i})^2=9-12\text{i}+4\text{i}^2=9-12\text{i}-4=5-12\text{i}$

Exercice 2 :

1. $3z+2\text{i}+7=7z-1+3\text{i}$

   $3z-7z=-1+3\text{i}-2\text{i}-7$

   $-4z=-8+\text{i}$

   $z=\dfrac{-8+\text{i}}{-4}$

   $z=2-\dfrac{1}{4}\text{i}$

2. $z\overline{z}+4z+6=3+4\text{i}$

   Posons : $z=x+\text{i}y$, x et y réels.

   L'équation devient : $x^2+y^2+4x+4\text{i}y+6=3+4\text{i}$

   Séparons partie réelle et partie imaginaire :

   $\begin{cases} x^2+y^2+4x+6=3 \\ 4y=4 \end{cases}$

   Ainsi :

   $\begin{cases} x^2+y^2+4x+6=3 \\ y=1 \end{cases}$

   On remplace :

   $\begin{cases} x^2+1^2+4x+6=3 \\ y=1 \end{cases}$

   $\begin{cases} x^2+4x+4=0 \\ y=1 \end{cases}$

   $\begin{cases} (x+2)^2=0 \\ y=1 \end{cases}$

   $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

   La solution est donc : $z=-2+\text{i}$

Exercice 3 :

1. $z_1 = 3+3\text{i}$

   $|z_1| = |3+3\text{i}| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$ Le module de z_1 est $3\sqrt{2}$

   Donc $z = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{3\sqrt{2}} + \dfrac{3}{3\sqrt{2}}\text{i}\right) = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right)$

   On reconnaît dans la parenthèse les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

   Donc un argument de z_1 est $\dfrac{\pi}{4}$

2. $z_2 = -2\text{i}$

   $|z_2| = |-2\text{i}| = |-2||\text{i}| = 2 \times 1 = 2$ Le module de z_2 est 2

   $z_2 = 2 \times (-\text{i}) = 2(0+\text{i}\times(-1)) = 2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

   Donc un argument de z est $-\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 4 :

1.a) $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)\right)$

   $z_1 = 2\,(0+\text{i}\times 1) = 2\text{i}$

b) $z_2 = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

   $z_2 = 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   $z_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2.a) $z_3 = 3+3\text{i}$

   $|z_3| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

   $z_3 = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   $z_3 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

b) $z_4 = 5\sqrt{3} - 5\text{i}$

   $|z_4| = \sqrt{5^2\times 3 + 5^2 \times 1} = 5\sqrt{3+1} = 5\sqrt{4} = 10$

   $z_4 = 10\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{10} - \dfrac{5}{10}\text{i}\right)$

   $z_4 = 10\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right)$

   $z_4 = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

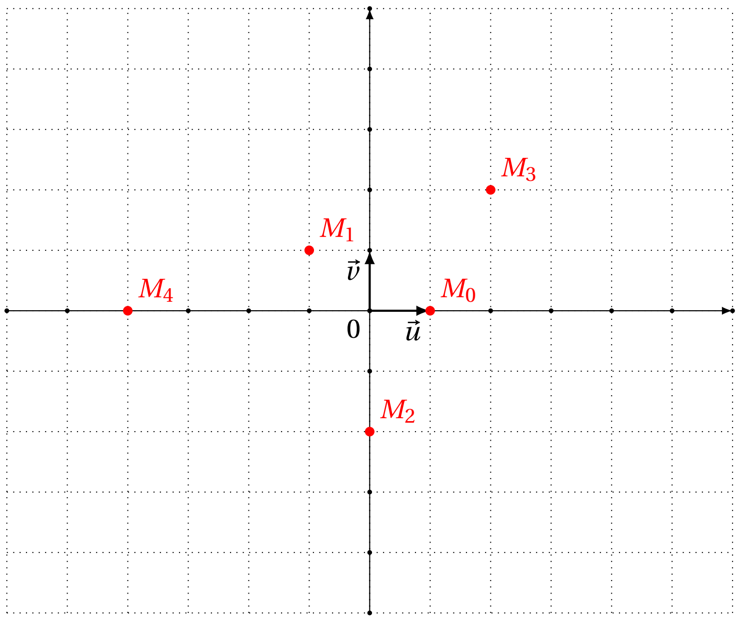
Exercice 5 :

1. $z_2 = (-1+\text{i})^2 = (-1)^2 + 2\times(-1)\times\text{i} + (\text{i})^2 = 1 - 2\text{i} - 1 = -2\text{i}$

   $z_3 = (-1+\text{i})^3 = (-1+\text{i})^2 \times (-1+\text{i}) = -2\text{i}\times(-1+\text{i}) = 2\text{i} - 2\text{i}^2 = 2+2\text{i}$

   $z_4 = (-1+\text{i})^4 = (-1+\text{i})^2 \times (-1+\text{i})^2 = (-2\text{i})\times(-2\text{i}) = 4\text{i}^2 = -4$

2. Le graphique :



3. $|z_n| = |(-1+\mathrm{i})^n| = (|-1+\mathrm{i}|)^n = \sqrt{1^2+1^2}^{\,n} = \sqrt{2}^{\,n}$

   On remarque que l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_n})$ mesure $n \times \dfrac{3\pi}{4}$ lorsque n varie de 0 à 4. On peut donc supposer que $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_n})$ mesure $n \times \dfrac{3\pi}{4}$ pour tout n.

   Ceux qui ont en tête la deuxième partie de la leçon savent qu'on a : $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$.

   Or ici, $\arg(-1+\mathrm{i}) = \dfrac{3\pi}{4}$, et donc $\arg(z_n) = n \times \dfrac{3\pi}{4}$.

4. On voit que z_0 est réel, et z_4 également. Chaque fois que n augmente de 4, z_n est multiplié par (-4) car $z_{n+4} = (-1+\mathrm{i})^{n+4} = (-1+\mathrm{i})^n \times (-1+\mathrm{i})^4 = z_n \times (-4)$.

   On voit donc que z_n est réel pour $n = 0$, 4, 8, 12, etc.

   Ainsi, z_n est réel lorsque n est un multiple de 4.

   On voit que z_2 est imaginaire pur. Chaque fois qu'on multiplie un complexe imaginaire pur par $z_4 = -4$, on retrouve un imaginaire pur.

   Ainsi, z_n est imaginaire pur pour $n = 2$, 6, 10, etc.

   Ainsi z_n est imaginaire pur lorsque n est de la forme : 2+ un multiple de 4.