Devoir surveillé n° 2

Mathématiques expertes - 25.11.2024

Exercice 1 (4 points) :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\overline{z} + 3\mathrm{i} = 2z - 1$
2. $z\overline{z} + z - 3 = \mathrm{i}$

Exercice 2 (4 points) :

1. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :
   a) $z_1 = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
   b) $z_2 = 7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$
2. Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :
   a) $z_3 = -5 + 5\mathrm{i}$
   b) $z_4 = 2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$

Exercice 3 (4 points) :

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|2z - 6 - 2\mathrm{i}| = 6$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z - 2| = |z - 2\mathrm{i}|$.

(Penser au lien entre module et distance.)

Exercice 4 (4 points) :

Résoudre de $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 10z + 74 = 0$
2. $9z^2 - 6z + 2 = 0$

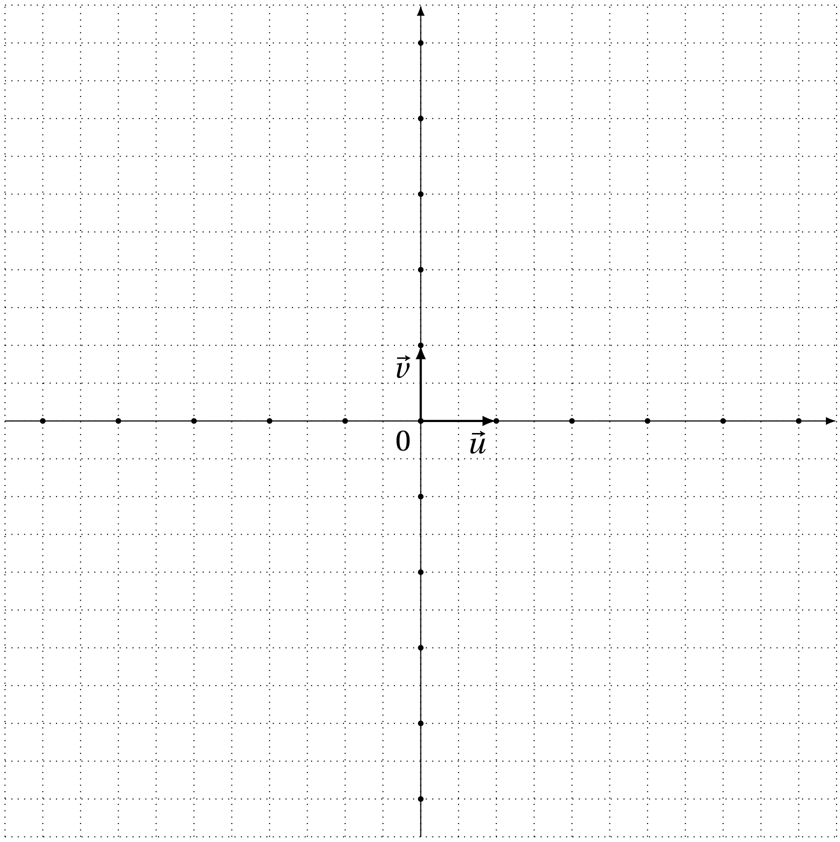
Exercice 5 (4 points) :

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $z_0 = 5$ et $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) z_n$.

Soit M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

1. Démontrer que la suite z_n est géométrique, et donner sa raison sous forme exponentielle.
2. En déduire z_n en fonction de n (donner le résultat sous forme exponentielle).

   Donner le module et un argument de z_n en fonction de n.
3. Montrer que tous les points M_n sont situés sur un même cercle de centre O et démontrer qu'ils forment les sommets d'un polygone régulier.
4. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 M_4 et M_5 dans le graphique ci-dessous.


$\vec{v}$
0
$\vec{u}$