Devoir surveillé n° 3

Mathématiques expertes - 13.01.2025

Exercice 1 (6 points) :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 - 5z^3 + 15z^2 - 5z - 26$

1. Montrer que -1 et 2 sont des racines de P.
2. En déduire une factorisation de P sous la forme $P(z) = (z+1)(z-2)Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme à déterminer.
3. Factoriser Q et en déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 2 (8 points) :

1. Développer $(2+3\mathrm{i})^6$ en utilisant la formule du binôme.
2. Développer $\left(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\right)^4$
3. En déduire en utilisant la formule de De Moivre que :

   $\cos(4a) = \sin(a)^4 - 6\cos(a)^2\sin(a)^2 + \cos(a)^4$

   et que :

   $\sin(4a) = 4\cos(a)^3\sin(a) - 4\cos(a)\sin(a)^3$.
4. En utilisant les formules d'Euler et la formule du binôme, montrer que :

   $\sin(a)^4 = \dfrac{1}{8}\cos(4a) - \dfrac{1}{2}\cos(2a) + \dfrac{3}{8}$.

Exercice 3 (6 points) :

On pose : $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^5 - 1$ sont : $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

   En déduire $P(z)$ sous forme factorisée.
2. On considère le polynôme $Q(z) = z^5 + 32$.

   Montrer que (-2) est une racine de Q.
3. Montrer que $z^5 + 32 = 0$ est équivalent à : $\left(\dfrac{z}{-2}\right)^5 - 1 = 0$.
4. En déduire toutes les racines de Q et écrire $Q(z)$ sous forme factorisée.