Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1. $P(-1) = 1 + 5 + 15 + 5 - 26 = 0$

   $P(2) = 16 - 5 \times 8 + 15 \times 4 - 5 \times 2 - 26 = 0$

2. Comme -1 et 2 sont des racines de P, on peut factoriser P par $z - (-1) = z + 1$ et $z - 2$, d'après la propriété du cours, et donc par le produit $(z+1)(z-2)$ (la raison profonde est que $z+1$ et $z-2$ sont premiers entre eux).

   Comme $(z+1)(z-2)$ est de degré 2, le polynôme Q est aussi de degré 2, car la somme des degrés doit être égal au degré de P.

   Première méthode : on écrit $Q(z) = az^2 + bz + c$, et on identifie les coefficients a, b et c.

   $(z+1)(z-2)Q(z) = (z+1)(z-2)(az^2 + bz + c) = (z^2 - z - 2)(az^2 + bz + c)$

   $= az^4 + (b-a)z^3 + (c - b - 2a)z^2 + (-c - 2b)z - 2c$

   Donc : $P(z) = z^4 - 5z^3 + 15z^2 - 5z - 26 = az^4 + (b-a)z^3 + (c-b-2a)z^2 + (-c-2b)z - 2c$

   On identifie : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -5 \\ c - b - 2a = 15 \\ -c - 2b = -5 \\ -2c = -26 \end{cases}$ ce qui donne : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \\ -5 = -5 \\ -26 = -26 \end{cases}$

   On peut donc écrire : $P(z) = (z+1)(z-2)(z^2 - 4z + 13)$

   Deuxième méthode : on divise $z^4 - 5z^3 + 15z^2 - 5z - 26$ par $(z+1)(z-2) = z^2 - z - 2$.

   On présente de la même façon que pour la division des entiers :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & -5z^3 & +15z^2 & -5z & -26 & z^2 - z - 2 \\ \cline{6-6}
-z^4 & +z^3 & +2z^2 & & & z^2 - 4z + 13 \\ \cline{1-3}
 & -4z^3 & +17z^2 & -5z & -26 & \\
 & +4z^3 & -4z^2 & -8z & & \\ \cline{2-4}
 & & 13z^2 & -13z & -26 & \\
 & & -13z^2 & +13z & +26 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

3. On factorise à présent $Q(z) = z^2 - 4z + 13$.

   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36$ Donc : $\Delta = (6\text{i})^2$

   Q admet donc deux racines complexes conjuguées :

   $z_1 = \dfrac{4 - 6\text{i}}{2} = 2 - 3\text{i}$ et $z_2 = \dfrac{4 + 6\text{i}}{2} = 2 + 3\text{i}$

   On a donc : $Q(z) = (z - 2 + 3\text{i})(z - 2 - 3\text{i})$

   Par conséquent, P se factorise sous la forme : $P(z) = (z+1)(z-2)(z - 2 + 3\text{i})(z - 2 - 3\text{i})$

   L'ensemble des racines de P est donc : $\left\{-1 ; 2 ; 2 - 3\text{i} ; 2 + 3\text{i}\right\}$

Exercice 2 :

1. On commence par calculer, grâce au triangle de Pascal, les coefficients binomiaux jusqu'à $n = 6$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On a donc d'après la formule du binôme :

$(2+3\mathrm{i})^6 = 2^6 + 6\times 2^5 \times 3\mathrm{i} + 15\times 2^4 \times (3\mathrm{i})^2 + 20\times 2^3 \times (3\mathrm{i})^3 + 15\times 2^2 \times (3\mathrm{i})^4 + 6\times 2\times (3\mathrm{i})^5 + (3\mathrm{i})^6$

$(2+3\mathrm{i})^6 = 64 + 6\times 32\times 3\mathrm{i} + 15\times 16\times 9\mathrm{i}^2 + 20\times 8\times 27\mathrm{i}^3 + 15\times 4\times 81\mathrm{i}^4 + 6\times 2\times 243\mathrm{i}^5 + 729\mathrm{i}^6$

$(2+3\mathrm{i})^6 = 64 + 576\mathrm{i} + 2160\mathrm{i}^2 + 4320\mathrm{i}^3 + 4860\mathrm{i}^4 + 2916\mathrm{i}^5 + 729\mathrm{i}^6$

$(2+3\mathrm{i})^6 = 64 + 576\mathrm{i} - 2160 - 4320\mathrm{i} + 4860 + 2916\mathrm{i} - 729$

On sépare partie réelle et partie imaginaire :

$(2+3\mathrm{i})^6 = 64 - 2160 + 4860 - 729 + (576 - 4320 + 2916)\mathrm{i}$

Ainsi :

$(2+3\mathrm{i})^6 = 2035 - 828\mathrm{i}$

2. $\left(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\right)^4$

$= \cos(a)^4 + 4\times\cos^3(a)\times \mathrm{i}\sin(a) + 6\times\cos^2(a)\times(\mathrm{i}\sin(a))^2 + 4\times\cos(a)\times(\mathrm{i}\sin(a))^3 + (\mathrm{i}\sin(a))^4$

$\left(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\right)^4 = \cos(a)^4 + 4\mathrm{i}\cos^3(a)\sin(a) - 6\cos^2(a)\sin^2(a) - 4\mathrm{i}\cos(a)\sin^3(a) + \sin^4(a)$

$\left(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\right)^4 = \cos(a)^4 - 6\cos^2(a)\sin^2(a) + \sin^4(a) + 4\mathrm{i}\left(\cos^3(a)\sin(a) - \cos(a)\sin^3(a)\right)$

3. D'après la formule de De Moivre : $\left(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\right)^4 = \cos(4a) + \mathrm{i}\sin(4a)$

On en déduit d'après la question 2 :

$\cos(4a) + \mathrm{i}\sin(4a) = \cos(a)^4 - 6\cos^2(a)\sin^2(a) + \sin^4(a) + 4\mathrm{i}\left(\cos^3(a)\sin(a) - \cos(a)\sin^3(a)\right)$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$\cos(4a) = \cos(a)^4 - 6\cos^2(a)\sin^2(a) + \sin^4(a)$

et :

$\sin(4a) = 4\left(\cos^3(a)\sin(a) - \cos(a)\sin^3(a)\right)$

ce qui correspond à l'énoncé.

4. D'après les formules d'Euler :

$$\sin(a)^4 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^4}{(2\mathrm{i})^4} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^4}{16}$$

On développe le numérateur :

$$\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)^4=\left(e^{ia}\right)^4-4\times\left(e^{ia}\right)^3\times\left(e^{-ia}\right)+6\times\left(e^{ia}\right)^2\times\left(e^{-ia}\right)^2-4\times\left(e^{ia}\right)\times\left(e^{-ia}\right)^3+\left(e^{-ia}\right)^4$$

On simplifie : $\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)^4=e^{4ia}-4e^{2ia}+6-4e^{-2ia}+e^{-4ia}$

On obtient alors : $\sin(a)^4=\dfrac{e^{4ia}-4e^{2ia}+6-4e^{-2ia}+e^{-4ia}}{16}$

On regroupe :

$$\sin(a)^4=\frac{e^{4ia}+e^{-4ia}-4e^{2ia}-4e^{-2ia}+6}{16}=\frac{e^{4ia}+e^{-4ia}}{16}-\frac{4\left(e^{2ia}+e^{-2ia}\right)}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\sin(a)^4=\frac{1}{8}\times\frac{e^{4ia}+e^{-4ia}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{2ia}+e^{-2ia}}{2}+\frac{3}{8}$$

Et donc :

$$\sin(a)^4=\frac{1}{8}\cos(4a)-\frac{1}{2}\cos(2a)+\frac{3}{8}$$

Exercice 3 :

1. Soit $k\in\mathbb{Z}$.

   On a : $P\left(\omega^k\right)=\left(\omega^k\right)^5-1=\omega^{5k}-1=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^{5k}-1=e^{i\frac{2\pi}{5}\times 5k}-1=e^{ik2\pi}-1$

   Or, $e^{ik2\pi}=\cos(k2\pi)+i\sin(k2\pi)=1$

   Par conséquent, quel que soit $k\in\mathbb{Z}$, on a : $P\left(\omega^k\right)=0$

   Les nombres 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4 sont différents et sont des racines de P. Comme P est de degré 5, il ne peut pas avoir plus de 5 racines. Donc il n'y en a pas d'autres, et on peut écrire :

   $P(z)=a(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$, où a est un coefficient complexe. On voit en développant que a est le coefficient de z^5, soit 1.

   Ainsi : $P(z)=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$

2. $Q(-2)=(-2)^5+32=-32+32=0$. Donc (-2) est bien une racine de Q.

3. $z^5+32=0$ équivaut successivement à :

   $\dfrac{z^5}{-32}+\dfrac{32}{-32}=0$ (en divisant l'égalité par (-32))

   $\dfrac{z^5}{(-2)^5}-\dfrac{32}{32}=0$

   $\left(\dfrac{z}{-2}\right)^5-1=0$

4. On voit que z est une racine de Q si et seulement si $\dfrac{z}{-2}$ est une racine de P.

   Donc, $\dfrac{z}{-2}$ appartient à l'ensemble $\left\{1;\omega;\omega^2;\omega^3;\omega^4\right\}$.

   Les racines de Q sont donc : $\left\{-2;-2\omega;-2\omega^2;-2\omega^3;-2\omega^4\right\}$.

   On en déduit : $Q(z)=\left(z+2\right)\left(z+2\omega\right)\left(z+2\omega^2\right)\left(z+2\omega^3\right)\left(z+2\omega^4\right)$