TP sur la formule du binôme

Éléments de correction

Gracieusement fournis par l'IA *******

Revus par M. Giacomoni

Corrigé de l'exercice 5 : Applications

a) Calcul de $(1+i)^4$ et $(1+i)^8$

On peut utiliser la forme exponentielle ou le binôme de Newton.

- **Par le binôme :** $(1+i)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}i + \binom{4}{2}i^2 + \binom{4}{3}i^3 + \binom{4}{4}i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$
- **Par la forme exponentielle :** $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4(-1) = -4$
- **En déduction :** $(1+i)^8 = ((1+i)^4)^2 = (-4)^2 = 16$

b) Formules de $\cos(3a)$ et $\sin(3a)$

D'après la formule de Moivre : $\cos(3a) + i\sin(3a) = (\cos a + i \sin a)^3$. En développant par le binôme de Newton :

$$(\cos a + i \sin a)^3 = \cos^3 a + 3i\cos^2 a \sin a - 3\cos a \sin^2 a - i\sin^3 a$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

- $\cos(3a) = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin(3a) = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

c) Linéarisation de $\cos^4(x)$

On utilise les formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$.

$$\cos^4 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{i4x} + 4\mathrm{e}^{i2x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-i2x} + \mathrm{e}^{-i4x})$$

En regroupant les termes conjugués ($\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx} = 2\cos(kx)$) :

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

d) Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

En utilisant la formule du binôme pour $(a+b)^n$ avec $a = 1$ et $b = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k \implies \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Somme alternée : Avec $a = 1$ et $b = -1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$.

Posons $A = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$ et $B = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$

D'après les deux résultats précédents, on a :

$$A+B=\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair ou impair}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

et, vu que $(-1)^k=1$ si k est pair et $(-1)^k=-1$ si k est impair :

$$A-B=\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k+\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$$

Le système $\begin{cases} A+B=2^n \\ A-B=0 \end{cases}$ se résout facilement : $A=2^{n-1}$ et $B=2^{n-1}$.

e) Somme alternée et dérivation

- **Dérivée de x^n :** Soit $f(x)=x^n$. Le nombre dérivé en a est :

  $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k\right)-a^n}{h}$$

  En isolant les premiers termes : $\dfrac{a^n+na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\cdots-a^n}{h}=na^{n-1}+h(\dots)$.

  À la limite quand $h\to 0$, on obtient bien $f'(a)=na^{n-1}$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Développement de $(a+b+1)^n$ de deux façons

On utilise la formule du binôme de Newton en regroupant les termes différemment pour identifier le coefficient du terme général a^ib^j.

Première méthode : Groupement $(a+(b+1))^n$

$$(a+(b+1))^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i(b+1)^{n-i}$$

En développant $(b+1)^{n-i}$ par le binôme :

$$(a+(b+1))^n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}a^ib^j$$

Deuxième méthode : Groupement $(b+(a+1))^n$ Par symétrie des rôles de a et b :

$$(b+(a+1))^n=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i}b^ja^i$$

2. Identification des coefficients

Le coefficient du terme a^ib^j doit être identique dans les deux expressions. On en déduit que pour tout (i,j) tel que $0\le i+j\le n$:

$$\binom{n}{i}\times\binom{n-i}{j}=\binom{n}{j}\times\binom{n-j}{i}$$

3. Déduction de la formule du pion

En posant $j = 1$ et $k = n - i$ (soit $i = n - k$), on utilise l'égalité précédente :

- Pour $j = 1$: $\binom{n}{i} \times \binom{n-i}{1} = \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{i}$
- Comme $\binom{m}{1} = m$, on a : $(n-i)\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i}$
- En substituant $i = n - k$: $k\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-k}$
- Par la propriété de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on obtient la formule du pion :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Corrigé de l'exercice 8 : Autre démonstration de la formule du pion

On considère la fonction $f(x) = (1+x)^n$.

a) Développement de $f(x)$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

b) Première expression de la dérivée

En dérivant terme à terme (le terme constant pour $k = 0$ s'annule) :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

c) Deuxième expression de la dérivée

En utilisant la dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$ avec $u(x) = x^n$, $a = 1$ et $b = 1$:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

d) Développement de cette expression

En utilisant à nouveau le binôme de Newton pour $(1+x)^{n-1}$ avec l'indice j :

$$f'(x) = n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j$$

e) Changement d'indice

En posant $k = j + 1$ (soit $j = k - 1$), les bornes deviennent 1 et n :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}$$

f) Conclusion par identification

Les deux expressions de $f'(x)$ étant identiques pour tout x, leurs coefficients devant x^{k-1} sont égaux. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$