Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. Les deux ensembles sont disjoints, donc $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$.
   Donc $\text{Card}(E \cup F) = 9$.
   $E \cup F$ contient par exemple : marteau ; Babette.

2. $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.
   Donc $\text{Card}(E \times F) = 20$.
   $E \times F$ contient par exemple : (marteau ; Dédé) ; (tournevis ; Caroline).

3. Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties de E.
   Le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n, d'après le cours.
   Ici, le cardinal de l'ensemble des parties de E est : $2^5 = 32$.

4. Déterminer le nombre de parties à 2 éléments de F.
   $\text{Card}(F) = 4$. Donc, le nombre de parties à deux éléments de F est : $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$.

Exercice 2 :

1. Si on appelle E l'ensemble des chiffres entre 0 et 9, un code est un 4-uplet d'éléments de E.
   L'ensemble des codes est donc E^4 et son cardinal est $\text{Card}(E)^4 = 10^4 = 10\,000$.

2. Un code formé avec des chiffres tous différents est un 4-arrangement de E.
   Donc le nombre de codes de ce type est $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

3. Soit la séquence est en début de code, et il reste un chiffre à placer à la fin, soit elle se trouve en fin de code et il reste un chiffre à placer au début. En début de code, on peut placer un chiffre de 1 à 9, soit 9 possibilités ; pareil pour un chiffre entre 1 et 9 en fin de code ; et il reste à compter en plus le code 0000.
   Cela donne : 9+9+1 = 19 codes comportant la séquence 000.

4. Considérons la condition contraire de celle définie dans l'énoncé. Comptons le nombre de codes ne comportant ni chiffre 0, ni chiffre 2.
   On a le choix entre 8 possibilités pour chaque chiffre du code ; donc on trouve par la même méthode que pour la question 1 : $8^4 = 4096$.
   Les codes comportant au moins une fois le 0 ou le 2 sont donc au nombre de : $10000 - 4096 = 5904$.

Exercice 3 :

1. On tire 3 boules ; il y en a 12 au total. Le nombre de tirages possibles est donc :
   $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$

2. On peut définir un tirage comportant 3 couleurs différentes par un un élément de $E \times F \times G$, où E est l'ensemble des boules noires, F l'ensemble des boules blanches et G l'ensemble des boules rouges.
   $\text{Card}(E \times F \times G) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) \times \text{Card}(G) = 5 \times 3 \times 4 = 60$.
   Il y a donc 60 tirages constitués de trois boules de couleurs différentes.

3. Un tirage formé de trois boules de même couleur est formé soit de 3 boules noires, soit de 3 boules blanches, soit de 3 boules rouges. Ce sont des sous-ensembles de l'ensemble de tous les tirages possibles qui sont 2 à 2 disjoints. En effet, on ne peut pas tirer trois boules en même temps rouges et blanches...
   On peut donc compter séparément ces possibilités, et ajouter le tout (principe additif).
   Il y a $\binom{5}{3} = 10$ façons de tirer 3 boules noires.
   Il y a $\binom{3}{3} = 1$ façons de tirer 3 boules blanches.
   Il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de tirer 3 boules rouges.
   Au total, il y a donc $10 + 1 + 4 = 15$ tirages constitués de 3 boules de même couleur.

Exercice 4 :

1. Le mot « bijection » comporte 9 lettres, dont 2 « i ».
   On peut distinguer les deux lettres i en les numérotant : i_1, i_2. Une anagramme obtenue en distinguant les deux lettres i peut s'obtenir comme un couple comprenant une anagramme obtenue sans les distinguer suivie d'une permutation de la séquence $(i_1 ; i_1)$.
   Par exemple :

   bi_1jecti_2on est associé à (bijection ; i_1i_2)

   $ji_2cbetoni_1$ est associé à (jicbetoni ; i_{21}), etc.
   Or une anagramme obtenue en distinguant les deux lettres n'est autre qu'une permutation des lettres b, i_1, j, e, c, t, i_2, o, n.
   Et une séquence i_1i_2 ou i_2i_1 est une permutation des symboles i_1, i_2.
   Ainsi, en multipliant le nombre d'anagramme n par le nombre de permutations de i_1, i_2, on trouve le nombre de permutation de b, i_1, j, e, c, t, i_2, o, n (principe multiplicatif).
   Par conséquent : $n \times 2! = 9!$, soit : $n = \dfrac{9!}{2!} = 181\,440$

2. Même méthode. Cette fois, il y a 12 lettres, dont 2 lettres « i », 2 lettres « s », 2 lettres « o » et 2 lettres « m ».
   Comme précédemment, à toute permutation de $i_1s_1o_1m_1o_2rphi_2s_2m_2e$, on peut associer un quintuplet de la forme :
   (anagramme ; permutation de i_1i_2 ; permutation de s_1s_2 ; permutation de o_1o_2 ; permutation de m_1m_2).

   Par le principe multiplicatif, on trouve :
   nombre de permutation de $i_1s_1o_1m_1o_2rphi_2s_2m_2e$ = nombre n d'anagrammes × nombre de permutations de i_1i_2 × nombre de permutations de s_1s_2 × nombre de permutations de o_1o_2 × nombre de permutations de m_1m_2.

   Cela donne : $12! = n \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!$ et donc : $n = \dfrac{12!}{(2!)^4} = 29\,937\,600$.

   Il y a 29 937 600 anagramme du mot « isomorphisme ». Ça fait beaucoup...

Exercice 5 :

1. Il y a $2n$ boules au total ; on en tire n ; il y a donc $\binom{2n}{n}$ possibilités.

2. Un tirage comportant p boules rouges comporte $n-p$ boules blanches (puisqu'il est constitué de n boules en tout).

   Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles pour les p boules rouges et $\binom{n}{n-p}$ choix possibles pour les $n-p$ boules blanches.

   Le nombre de possibilités est donc $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$.

   Mais comme $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ (propriété du cours), le nombre de possibilités s'écrit aussi : $\binom{n}{p}^2$.

3. D'après la question 2 :

   $\binom{n}{0}^2$ est le nombre de tirages comportant 0 boule rouge ;

   $\binom{n}{1}^2$ est le nombre de tirages comportant 1 boule rouge ;

   $\binom{n}{2}^2$ est le nombre de tirages comportant 2 boules rouges ;

   etc.

   $\binom{n}{n}^2$ est le nombre de tirages comportant n boules rouges.

   En ajoutant ces nombres, on trouve le nombre total de tirages, puisque le nombre de boules rouges dans un tirage est forcément compris entre 0 et n.

   Ainsi, d'après la question 1 : $S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.