Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. Calculer $\binom{10}{4}$, $\binom{15}{5}$.

   $\binom{10}{4} = 210$

   $\binom{15}{5} = 3003$

2. Construire le triangle de Pascal pour n variant entre 0 et 6.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Exercice 2 :

NB : dans le sujet, le mot « dièse » est mal orthographié (« dièze »). Je m'en excuse.

Soit $E = \{\text{si} ; \text{mi} ; \text{la} ; \text{ré} ; \text{sol}\}$ et $F = \{\text{bémol} ; \text{dièse} ; \text{mineur} ; \text{majeur}\}$ deux ensembles.

1. Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.

   Les deux ensembles sont disjoints, par conséquent $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) = 9$.
   Par exemple, si et dièse appartiennent à $E \cup F$.

2. Déterminer le nombre d'éléments de $E \times F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.

   $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = 20$.
   Par exemple, $(\text{si} ; \text{bémol})$ et $(\text{sol} ; \text{mineur})$ appartiennent à $E \times F$.

3. Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties de E.

   On sait que l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal n a pour cardinal 2^n.
   Ici, le cardinal de l'ensemble des parties de E est donc $2^5 = 32$.

4. Déterminer le nombre de parties à 2 éléments de E. Énumérer toutes ces parties.

   Le nombre de parties à deux éléments de E est : $\binom{5}{2} = 10$.

   Ces parties sont :
   $\{\text{si} ; \text{mi}\}$, $\{\text{si} ; \text{la}\}$, $\{\text{si} ; \text{ré}\}$, $\{\text{si} ; \text{sol}\}$,
   $\{\text{mi} ; \text{la}\}$, $\{\text{mi} ; \text{ré}\}$, $\{\text{mi} ; \text{sol}\}$,
   $\{\text{la} ; \text{ré}\}$, $\{\text{la} ; \text{sol}\}$,
   $\{\text{ré} ; \text{sol}\}$.

Exercice 3 :

1. Combien de mot de 6 lettres peut-on former avec les lettres du mot PASCAL (on peut utiliser plusieurs fois la même lettre) ?

   Le mot PASCAL contient 5 lettres différentes. Si on veut former un mot de 6 lettres, on a donc 5 choix possibles pour chacune des lettres.

   Autrement dit, en posant : $E = \{\mathrm{P}\,;\mathrm{A}\,;\mathrm{S}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{L}\}$, un mot de 6 lettres peut être considéré comme un élément de E^6.

   Par application du principe multiplicatif, on obtient : $\mathrm{Card}(E^6) = 5^6$.

   Le nombre de mots cherché est donc $5^6 = \boxed{15\,625}$.

2. Combien peut-on former d'anagrammes du mot PASCAL (on permute simplement l'ordre des lettres) ?

   Une anagramme est une permutation des lettres du mot PASCAL.

   Il y a 6! permutations, mais il faut remarquer qu'une permutation des deux lettres A donne le même mot. Chaque anagramme correspond donc à deux permutations du mot PASCAL.

   Le nombre d'anagrammes est donc : $\dfrac{6!}{2} = 360$. Si on élimine le mot de départ, on obtient donc : $\boxed{359}$ anagrammes

Exercice 4 :

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 12 femmes et 8 hommes.

1. De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

   Il y a 20 personnes au total.

   Donc on choisit 6 éléments parmi 20. $\dbinom{20}{6} = 38\,760$.

   Il y a donc $\boxed{38\,760}$ façons de constituer ce groupe.

2. De combien de façons peut-on constituer ce groupe avec uniquement des hommes ?

   On choisit cette fois 6 personnes parmi les 8 hommes. $\dbinom{8}{6} = 28$.

   Il y a donc $\boxed{28}$ façons de constituer ce groupe avec uniquement des hommes.

3. De combien de façons peut-on constituer ce groupe avec des personnes de même sexe ?

   On choisit cette fois 6 personnes parmi les 8 hommes, ou parmi les 12 femmes.

   Les deux possibilités sont incompatibles, donc on peut appliquer le principe additif.

   $\dbinom{8}{6} = 28$.

   $\dbinom{12}{6} = 924$.

   $28 + 924 = 952$

   Il y a donc $\boxed{952}$ façons de constituer ce groupe avec uniquement des personnes de même sexe.

4. De combien de façons peut-on constituer ce groupe avec au moins une femme et au moins un homme ?

   Soit E l'ensemble de tous les groupes constitués de 6 personnes et A le sous-ensemble formé des groupes comprenant au moins une femme et au moins un homme.
   Les éléments de E qui n'appartiennent pas à A sont des groupes qui ne contiennent aucune femme ou aucun homme ; autrement dit, ils sont constitués soit seulement d'hommes, soit seulement de femmes.
   Leur nombre est 952, d'après la question précédente.
   Donc, le nombre de groupes qui n'appartiennent pas à A est donc : $38\,760 - 952 = 37\,808$.
   On peut constituer ce groupe avec au moins une femme et au moins un homme de $\boxed{37\,808}$ façons.

Exercice 5 :

Un bus qui dessert 10 stations transporte au départ 7 voyageurs. On sait qu'aucun voyageur n'est monté en cours de route.

1. De combien de façons les 7 voyageurs ont-ils pu descendre du bus ?

   On peut modéliser la situation sous la forme d'un ensemble de 7-uplets constitués ainsi :
   (numéro de l'arrêt où est descendu le premier voyageur ; numéro de l'arrêt où est descendu le deuxième voyageur ; ... ; numéro de l'arrêt où est descendu le 7^{e} voyageur)

   Autrement dit, une possibilité correspond à un 7-uplet de nombres compris entre 1 et 10.

   D'après le principe multiplicatif, il y a 10^7 7-uplets de ce type. Donc il y a $\boxed{10^7 = 10\,000\,000}$ façons pour les voyageurs de descendre du bus.

2. Même question sachant qu'il en est descendu au plus un par arrêt ?

   Dans ce cas, le numéro d'un arrêt apparaît une seule fois dans chacun des 7-uplets définis précédemment. On cherche donc le nombre d'arrangements de 7 éléments pris parmi 10.
   Le nombre de façons pour les 7 voyageurs de descendre du bus est donc :
   $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \boxed{604\,800}$.

Exercice 6 :

Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle souhaite en inviter cinq à dîner.

1. Calculer le nombre de possibilités dont elle dispose.

   On choisit 5 éléments parmi 11, le nombre de possibilités est donc : $\binom{11}{5} = \boxed{462}$.

2. Calculer le nombre de possibilités si deux de ses amis sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble.

   On forme deux sous-ensembles : le premier formé des 9 amis qui viennent individuellement, et le second formé des deux amis qui viennent ensembles.
   Si les cinq invités appartiennent au premier sous-ensemble, il y a $\binom{9}{5} = 126$ possibilités.
   Si on invite les deux amis du second sous-ensemble, ils viennent ensembles et on choisit les 3 autres invités parmi les membres du premier sous-ensemble. Il y a donc $\binom{9}{3} = 84$ possibilités.

Les deux cas précédents étant incompatibles, on applique le principe d'addition : $126+84 = 210$.

Si deux de ses amis sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble, il y a donc $\boxed{210}$ possibilités.

3. Calculer le nombre de possibilités si deux de ses amis sont en mauvais termes et ne peuvent pas être invités ensemble.

   On peut à nouveau former deux sous-ensembles : le premier formé des 9 amis qui sont en bons termes, et le second formé des deux amis qui sont en mauvais termes.
   Si les cinq invités appartiennent au premier sous-ensemble, il y a $\binom{9}{5} = 126$ possibilités.
   Si on invite un des des deux amis du second sous-ensemble, il y a deux possibilités et on choisit les 4 autres invités parmi les membres du premier sous-ensemble. Il y a donc $2 \times \binom{9}{4} = 252$ possibilités.
   Ces deux cas étant incompatibles, on applique le principe d'addition : $126 + 252 = 378$.

   Si deux de ses amis sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble, il y a donc $\boxed{378}$ possibilités.