Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. Le mot « parabole » contient 8 lettres. Si on distingue les deux « a », par exemple en les notant « a1 » et « a2 », on obtient autant d'anagrammes que de permutations de l'ensemble des lettres, soit 8!.

   Chaque anagramme formée sans distinguer les deux « a » correspond à deux « fausses » anagrammes obtenues en distinguant les « a ». Par exemple, la « vraie » anagramme « aaprbole » correspond à deux « fausses » anagrammes : « a1a2prbole » et « a2a1prbole ».

   En d'autres termes, chaque fois qu'on détermine une nouvelle anagramme, on réserve deux cases pour les lettres « a », qu'on remplit dans l'ordre « a1a2 » ou dans l'ordre « a2a1 ».

   Ainsi : 10! est le double du nombre d'anagrammes du mot « parabole ».

   Le nombre d'anagrammes est donc : $\dfrac{8!}{2} = 20160$.

2. Le mot « ellipse » contient 7 lettres; comme précédemment, déterminer une anagramme de ce mot revient à réserver deux cases pour les « e » et deux cases pour les « l ». Il y a deux manières de disposer les deux lettres « e » et deux manières de disposer les deux lettres « l ». Donc, à chaque anagramme correspond quatre permutations de l'ensemble des lettres du mot « ellipse », obtenues en distinguant les deux « e » et les deux « l ».

   Ainsi : 7! est 4 fois le nombre d'anagrammes du mot « ellipse ».

   Le nombre d'anagrammes est donc : $\dfrac{7!}{4} = 1260$.

Exercice 2 :

1. Il y a 7 personnes au total; comme il n'y a aucune contrainte, on les fait asseoir dans n'importe quel ordre. Il y a donc autant de façon de faire asseoir les 7 personnes que de permutation de l'ensemble de ces 7 personnes.

   il y a donc $7! = 5040$ manière de faire asseoir les personnes sur un banc.

   Vu d'une autre façon, si on numérote les places de 1 à 7, on a 7 numéros possibles pour placer la première personne, 6 numéros pour la deuxième, etc. jusqu'à 1. Cela donne bien 7! possibilités au total.

2. Cherchons le nombre de manières de faire asseoir les deux garçons qui ne s'entendent pas, appelons-les A et B, l'un à côté de l'autre.

   Les places étant numérotées de 1 à 7, ils peuvent occuper les places 1 et 2, les places 2 et 3, ... jusqu'à 6 et 7. Il y a donc 6 façons de réserver leurs places, et pour chacune, on peut les placer dans l'ordre AB ou dans l'ordre BA.

   Ensuite, on répartit les 5 personnes restantes parmi les 5 places restantes, ce qui donne 5! choix possibles.

   Il y a donc au total : $6 \times 2 \times 5! = 1440$ dispositions possibles pour lesquelles A et B sont à côté l'un de l'autre. On élimine ces possibilités, il en reste donc : $5040 - 1440 = 3600$.

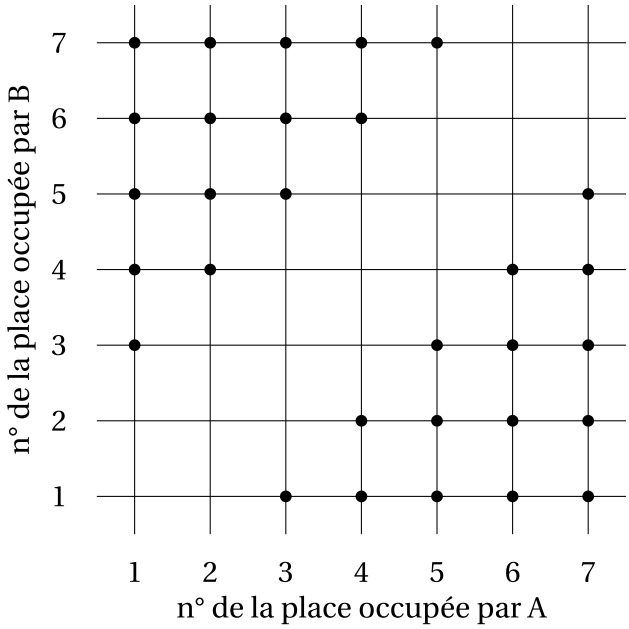
   Il y a donc 3600 façons possibles de placer les 7 personnes sans que les deux garçons A et B se trouvent à côté l'un de l'autre.

   Une autre façon de compter est la suivante :

Considérons l'ensemble des couples : (n° de place de A; n° de place de B).

On voit que ces couples sont formés de deux nombres entiers pris entre 1 et 7, mais qui doivent être distants d'au moins 2 unités (pour que les deux numéros ne soient pas consécutifs).

Faisons un petit dessin :



On voit qu'il y a 30 couples qui répondent au problème : (1 ; 3), (1 ; 4), etc.

Il y a donc 30 façons de placer A et B de façon qu'ils ne soient pas l'un à côté de l'autre. Il y a ensuite 5! façons de répartir les 5 autres personnes parmi les places restantes.

Il y a donc $30 \times 5! = 3600$ manières de placer les 7 personnes de façon à ce que A et B ne soient pas l'un à côté de l'autre.

3. Si les garçons et les filles doivent rester ensemble, il y a deux dispositions possibles : FFFGGGG ou GGGGFFF.

   Une fois la disposition choisie, il y a 3! façons de répartir les 3 filles parmi les 3 places et 4! façons de répartir les 4 garçons parmi les 4 places.

   On obtient au total : $2 \times 3! \times 4! = 288$.

   Il y a 288 façons de placer les 7 personnes de manière que les garçons soient ensemble et les filles aussi.

4. Si deux personnes du même sexe ne sont pas voisines, on doit disposer en alternance une fille et un garçon, et on voit qu'il y a une seule disposition possible : GFGFGFG.

   Une fois cette disposition choisie, comme pour la question précédente, il y a 3! façons de répartir les 3 filles parmi les 3 places et 4! façons de répartir les 4 garçons parmi les 4 places.

   On obtient au total : $3! \times 4! = 144$.

   Il y a 144 façons de placer les 7 personnes de manière que deux personnes du même sexe ne soient jamais voisines.

Exercice 3 :

1. $E \cup F$ est l'ensemble réunion de E et F, c'est à dire l'ensemble formé par tous les éléments appartenant au moins à un des deux ensembles.

Comme E et F n'ont pas d'éléments en commun (ils sont disjoints), le nombre d'éléments de $E \cup F$ est la somme du nombre d'éléments de E et du nombre d'éléments de F.

Autrement dit : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$ (principe additif).

Ainsi, le nombre d'éléments de $E \cup F$ est $8+6=14$.

$E \cup F$ contient par exemple : rouge, losange...

2. $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où x appartient à E et y appartient à F.
On sait que le nombre de ces couples est le produit du nombre d'éléments de E par le nombre d'éléments de F, autrement dit :
$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

   Par conséquent, le nombre d'éléments de $E \times F$ est $8 \times 6 = 48$.

   $E \times F$ contient par exemple : (rectangle ; rouge), (pentagone ; vert), etc.

3. D'après le cours, le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

   Donc ici, le cardinal de l'ensemble des parties de E est $2^8 = 256$.

4. D'après le cours le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à n éléments, appelées aussi combinaisons de 2 éléments, est $\binom{n}{2}$.

   Donc, ici, le nombre de parties à 2 éléments de F est : $\binom{6}{2} = 15$.

Exercice 4 :

1. Le tirage d'une boule est une expérience à deux issues : la boule est bleue ou rouge. La probabilité que la boule tirée soit bleue est : $p = \dfrac{3}{3+9} = \dfrac{1}{4}$.
On répète cette expérience à deux issues 6 fois de suite, de façon indépendante, car le tirage s'effectue avec remise.
La répétition de ces 6 tirages constitue donc un schéma de Bernoulli, et la variable aléatoire X comptant le nombre de boules bleues tirées suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

2. D'après le cours : $P(X=3) = \binom{6}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^3 = 20 \times \dfrac{1}{64} \times \dfrac{27}{64} = \dfrac{135}{1024} \simeq 0,1318$

3. On cherche : $P(X \geq 5)$ qui vaut $1 - P(X \leq 4)$ car les événements $\{X \geq 5\}$ et $\{X \leq 4\}$ sont contraires.

   La calculatrice donne : $P(X \leq 4) \simeq 0,9954$; donc $P(X \geq 5) \simeq 0,0046$.

4. L'espérance de X est $E(X) = np = 6 \times \dfrac{1}{4} = 1,5$. Cela signifie qu'en moyenne, parmi les 6 boules tirées, 1,5 sont bleues.

   Ainsi, chaque partie (chaque tirage de 6 boules) rapporte en moyenne 1,5 euros au joueur. Comme il doit miser 2 euros, il perd en moyenne 0,5 euros par partie.
Ce jeu n'est absolument pas intéressant pour lui.

Exercice 5 (4 points) :

1. Les parties étant indépendantes, chaque tournoi est assimilable à la répétition de 11 expériences indépendantes à 2 issues.

   Si on appelle X le nombre de parties gagnées par B, on voit que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,4$ (car la probabilité que B gagne est égale à la probabilité que A perde.)

   B gagne le tournoi s'il gagne plus de partie que A : il doit donc en gagner au moins 6.

   On cherche donc à calculer $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$. La calculatrice nous donne environ : 0,2465

   La probabilité que B gagne le tournoi est d'environ 0,2465.

2. L'événement contraire de « B gagne au moins un tournoi » est : « B gagne 0 tournoi », autrement dit, « B perd tous ses tournois ».

   La probabilité que B perde un tournoi est $1 - 0,2465 = 0,7535$ environ.

   Si B joue n tournois, la probabilité qu'il les perde tous est donc : $0,7535^n$. Puisque la probabilité que B en gagne au moins un doit être supérieure à 0,9, la probabilité qu'il les perde tous doit être inférieure à 0,1.

   On cherche donc n tel que $0,7535^n < 0,1$. Faisons quelques essais à la calculatrice :

   On a : $0,7535^5 \simeq 0,2429$, trop grand.

   $0,7535^{10} \simeq 0,0590$, trop petit.

   $0,7535^8 \simeq 0,1039$, trop grand.

   $0,7535^9 \simeq 0,0783$, inférieur à 0,1.

   Il faut donc organiser au minimum 9 tournois pour que la probabilité que B en gagne au moins un soit supérieure à 0,9.