Correction du devoir de rattrapage n° 2

Exercice 1 :

Parmi 10 couples mariés on doit choisir un groupe de 6 personnes qui ne doit pas contenir de couple marié.

1. Combien de possibilités y a-t-il ?

   Première méthode : On choisit d'abord 6 couples parmi les 10 ; il y a $\binom{10}{6}$ possibilités.

   Dans chaque couple, on choisit la femme ou l'homme : 2 possibilités pour chaque, soit 2^6 au total.

   Ainsi, il y a $\binom{10}{6} \times 2^6 = 13440$

   Deuxième méthode : On choisit successivement 6 personnes.

   Pour la première, il y a 20 choix possibles.

   Pour la deuxième, 18 choix possibles, car on élimine le conjoint de la première personne choisie.

   Pour la troisième, 16 choix possibles, car on élimine les conjoints des deux premières personnes choisies.

   Pour la quatrième, 14 choix, etc.

   On trouve donc : $20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12 \times 10$ 6-uplets de personnes. Chaque groupe de 6 personnes correspond à 6! listes de cette sorte, car ayant choisi 6 personnes, il existe 6! façon de les ordonner (c'est le même raisonnement que pour les anagrammes).

   Ainsi, il y a $\dfrac{20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12 \times 10}{6!} = 13440$

2. Combien de possibilités y a-t-il si le groupe doit contenir 3 hommes et 3 femmes ?

   Première méthode : On choisit 6 couples : $\binom{10}{6}$ possibilités.

   Parmi ces 6 couples, on choisit 3 femmes : $\binom{6}{3}$ possibilités ; le reste des personnes est constitué des 3 hommes qui ne sont pas les conjoints des femmes choisies.

   Il y a donc $\binom{10}{6} \times \binom{6}{3} = 4200$ possibilités.

   Deuxième méthode : On choisit 3 femmes parmi les 10 ; puis 3 hommes parmi les 7 qui ne sont pas les conjoints des 3 femmes choisies.

   Il y a donc $\binom{10}{3} \times \binom{7}{3} = 4200$ possibilités.

Exercice 2

1. Combien de nombres impairs (écrits en notation standard) de six chiffres peut-on former ?

   Comptons le nombre total de nombres (pairs et impairs) à 6 chiffres. Il y a 9 possibilités pour le premier chiffre et 10 pour chacun des livres suivants.

   Au total : 9×10^5 possibilités.

   Il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, donc on divise le résultat précédent par 2.

   Il y a donc $\dfrac{9 \times 10^5}{2} = 450\,000$ nombres impairs (écrits en notation standard) de six chiffres.

2. Combien de nombres impairs de six chiffres peut-on former si les chiffres sont tous différents ?

   Comptons le nombre total de nombres (pairs et impairs) à 6 chiffres, tous différents.

   Il y a 9 possibilités pour le premier chiffre.

   Puis 9 possibilités pour le deuxième chiffre (car on élimine le premier chiffre, mais on ajoute le zéro).

   Puis 8 possibilités pour le deuxième chiffre (on élimine les deux premiers).

   Puis 7 possibilités, puis 6, etc.

   Au total : $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ possibilités. On divise ce résultat par 2 pour ne garder que les nombres impairs.

   Il y a donc $\dfrac{9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 68\,040$ nombres impairs de six chiffres, tous différents.

3. Combien de nombres de six chiffres contenant la séquence « 123 » peut-on former ?

   La séquence « 123 » peut apparaître en première, deuxième, troisième, ou quatrième position : 123XXX, X123XX, XX123X, XXX123.

   Si « 123 » apparaît en premier : on a 10 possibilités pour chacun des 3 autres chiffres. Au total 10^3 possibilités.

   Si « 123 » apparaît en deuxième, en troisième ou quatrième : on a 9 possibilités pour le premier chiffre et 10 possibilités pour chacun des 2 autres chiffres. Au total $3 \times 9 \times 10^2$ possibilités.

   Ainsi, il y a $10^3 + 3 \times 9 \times 10^2 = 3700$.

4. Combien de nombres de six chiffres peut-on former avec la contrainte que deux chiffres qui se suivent sont différents ?

   Premier chiffre : 9 choix possibles (chiffres de 1 à 9).

   Deuxième chiffre : 9 possibilités (chiffres de 0 à 9, sauf le chiffre précédent).

   Troisième chiffre : 9 possibilités (même raisonnement). Idem pour les 3 chiffres suivants.

   Au total, il y a donc $9^6 = 531441$ possibilités.

Exercice 3 :

1. De combien de manières peut-on offrir 7 jouets à 3 enfants si le plus jeune reçoit un jouet de plus que les deux autres ?

   L'aîné reçoit 2 jouets, le cadet 2 et le dernier 3.

   Il y a donc $\binom{7}{2}$ choix possibles pour les jouets de l'aîné, $\binom{5}{2}$ choix pour les jouets du cadet, et ce qui reste va au dernier.

   Au total, il y a donc $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 210$ manières différentes.

2. Soit E un ensemble à 15 éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à 8 éléments.

   a) Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement un élément de A ?

      Il y a 8 choix possibles pour l'élément de A retenu ; le reste forme une partie quelconque composée d'éléments de $E \setminus A$ (E privé de A).

      Comme $E \setminus A$ contient 7 éléments, on peut former 2^7 parties d'éléments de $E \setminus A$.

      Le nombre de parties de E qui contiennent exactement un élément de A est donc $8 \times 2^7 = 1024$.

b) Quel est le nombre de parties de E qui contiennent au moins un élément de A ?
Le nombre de parties de E est : 2^{15} (puisque E contient 15 éléments).
Le nombre de parties de E ne contenant aucun élément de A est égal à 2^7 car $E \setminus A$ contient 7 éléments.
Donc le nombre de parties de E qui contiennent au moins un élément de A est $2^{15} - 2^7 = 32640$.

Exercice 4 :

A chaque tir la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est 0,7. Il tire 10 fois de suite. La variable aléatoire X compte le nombre de tirs atteignant la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner les paramètres de cette loi. (Justifier soigneusement.)
   Un tir constitue une expérience à deux issues. La succession de 10 tirs constitue donc la répétition d'une expérience à deux issues, indépendantes les unes des autres puisque la probabilité d'atteindre la cible ne varie pas.
   X compte le nombre de tirs réussis parmi les 10, donc elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.

2. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne exactement 8 fois la cible ? (Détailler les calculs en utilisant la formule du cours.)
   On cherche $P(X = 8)$. D'après le cours, on a :
   $$P(X=8) = \binom{10}{8} \times 0,7^8 \times (1-0,7)^2 = 45 \times 0,7^8 \times 0,3^2 \simeq 0,2335$$

3. Quelle est la probabilité que le tireur rate la cible au moins une fois ?
   On cherche $P(X \leq 9)$.
   À la calculatrice, on trouve : $P(X \leq 9) \simeq 0.9718$

4. Calculer l'espérance de X, $E(X)$, et la variance de X, $V(X)$.
   $E(X) = n \times p = 10 \times 0,7 = 7$
   $V(X) = n \times p \times (1-p) = 10 \times 0,7 \times 0,3 = 2,1$

Exercice 5 :

1. Combien de fois faut-il lancer un dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure ou égale à 0,95 ?
   On lance n fois un dé ; la variable aléatoire comptant le nombre de « six » obtenus suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$.
   On veut choisir n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,95$.
   Or, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.
   Donc : $1 - P(X=0) \geq 0,95$, donc $1 - 0,95 \geq P(X=0)$, donc $P(X=0) \leq 0,05$
   Donc : $\binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05$
   C'est à dire : $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05$
   On trouve par essais successifs : $\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \simeq 0,0541$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \simeq 0,0451$
   Donc $n = 17$ au minimum. Il faut donc lancer le dé au moins 17 fois.

2. Une urne contient 4 boules rouges et N boules noires. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. Comment doit-on choisir N pour que la probabilité de tirer au moins une boule noire soit supérieure ou égale à 0,99 ?

   On peut dessiner un arbre et répondre directement.

   On peut aussi raisonner en définissant la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules noires obtenues parmi les deux tirées.

   Ici, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{N}{N+4}$.

   On veut choisir N tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$.

   Or, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$; donc : $1 - P(X = 0) \geq 0,99$ et donc : $P(X = 0) \leq 0,01$.

   Ainsi : $\dbinom{2}{0} \times \left(\dfrac{N}{N+4}\right)^0 \times \left(\dfrac{4}{N+4}\right)^2 \leq 0,01$

   $\left(\dfrac{4}{N+4}\right)^2 \leq 0,01 = 0,1^2$

   Comme $\dfrac{4}{N+4}$ et $0,01$ sont positifs, leurs carrés sont dans le même ordre qu'eux-mêmes.

   On obtient donc : $\dfrac{4}{N+4} \leq 0,1$

   On résout : $\dfrac{4}{0,1} \leq N + 4$ (car on divise par un nombre positif)

   $40 \leq N + 4$

   $N \geq 36$

   On voit qu'il faut choisir N au moins égal à 36.