Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 :

1. En $-\infty$:
   On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
   Ainsi, on est en présence d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ». On se ramène à la formule du cours en développant.

   $(x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$
   On sait d'après le cours que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$ pour tout entier n
   et que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
   Par conséquent : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = 0$

   On en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 1$

   En $+\infty$:
   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)\mathrm{e}^x = +\infty$
   Et donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = +\infty$

   Conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. C'est un classique produit de fonction.
   Posons : $u(x) = 2(x-1)$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Comme la constante 1 donne 0 en dérivant, on obtient : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

   $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

   Donc : $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x(1 + x - 1)$, soit : $f'(x) = 2x\mathrm{e}^x$.

   Comme $2\mathrm{e}^x$ est strictement positif pour tout x, $f'(x)$ est du signe de x.

3. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   $f(0) = 2(0-1)\mathrm{e}^1 + 1 = -2 + 1 = -1$

4. Sur $]-\infty ; 0]$:
   - f est continue (car dérivable)
   - f est strictement décroissante
   - $0 \in [-1 ; 1[= [f(0) ; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

   Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty ; 0]$.

   Sur $[0 ; +\infty[$:

- f est continue (car dérivable)
- f est strictement croissante
- $0 \in [-1\,;+\infty[= [f(0)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[0\,;+\infty[$.

En résumé, l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

5. On trouve à la calculatrice : $\alpha \simeq -1{,}68$
6. **Continuité :**
Comme $1 \in]-\infty\,;1]$, on utilise la première formule pour trouver l'image de 1 :
$g(1) = f(1) = 2(1-1)\mathrm{e}^1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

D'autre part, comme f est continue : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = f(1) = 1$

Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = 2\mathrm{e}(1-1)+1 = 0+1 = 1$.

La limite est la même « des deux côtés ».

Ainsi, on a : $\lim\limits_{x\to1} g(x) = g(1)$; donc g est continue en 1.

Dérivabilité :
Limite à gauche :
$$\lim_{\substack{h\to1\\h<1}} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to1\\h<1}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 2\times1\times\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$$

Limite à droite :

Si on pose $u(x) = 2\mathrm{e}(x-1)+1$, on calcule facilement : $u'(1) = 2\mathrm{e}$.
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to1\\h>1}} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to1\\h>1}} \dfrac{u(1+h)-u(1)}{h} = u'(1) = 2\mathrm{e}$

Donc la limite est la même des deux côtés : $\lim\limits_{\substack{h\to1\\h<1}} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to1\\h>1}} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = 2\mathrm{e}$.

Par conséquent, g est dérivable en 1 et $g'(1) = 2\mathrm{e}$.

Exercice 2 :

1. Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2\times(x+2)-(2x+3)\times1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, puisqu'un carré est toujours positif.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

2. Soit la propriété : $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 3$.

   Initialisation :
   Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car on calcule facilement : $u_1 = f(u_0) = f(3) = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$.

   Hérédité :
   Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier n : $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 3$.
   On veut en déduire que la propriété est alors vraie au rang $n+1$, c'est à dire : $0 \leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 3$.

   Supposons donc : $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 3$.
   On applique la fonction f, qui est strictement croissante. L'ordre est donc conservé :

   $f(0) \leq f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(3)$
   C'est à dire : $1{,}5 \leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 1{,}8$
   On en déduit : $0 \leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 3$

   La propriété est bien héréditaire.

   Résumons : la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire ; donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc elle est convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

4. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ (1).

   D'autre part, la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc en particulier en ℓ.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ (2).

   En rapprochant les égalités (1) et (2), on en déduit que $f(\ell) = \ell$. Autrement dit ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

5. On résout l'équation.
   $f(x) = x$
   $\dfrac{2x+3}{x+2} = x$
   $2x + 3 = x(x+2)$
   $2x + 3 = x^2 + 2x$
   $x^2 = 3$
   Cette équation a deux solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. On garde la première, car f est définie sur $[0\,;+\infty[$ et la seconde n'appartient pas à cet intervalle.

   On peut conclure : $\boxed{\ell = \sqrt{3}}$.

6.

```
def suite_u(n) :
  u = 3
  for i in range(n) :
      u=(2*u+3)/(u+2)
  return u
```