Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

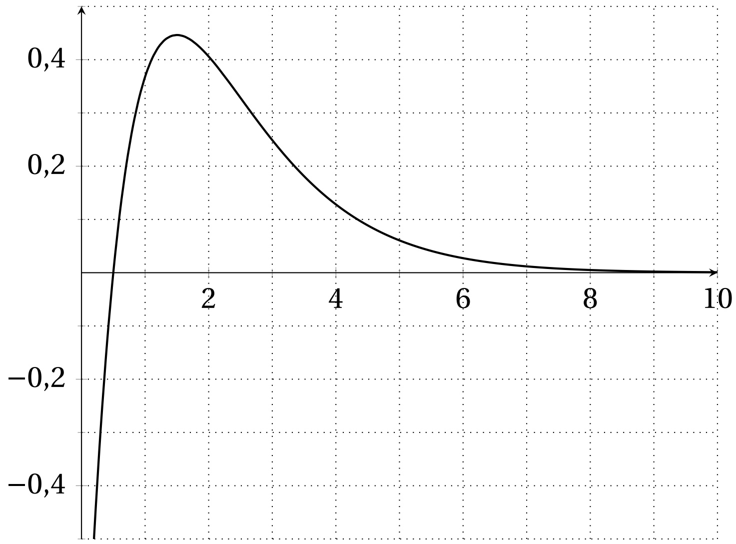
Exercice 1 (4 points) :

Calculer sur l'intervalle donné la dérivée de chacune des fonctions suivantes en utilisant la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.

1. $f(x) = \left(x^2+1\right)^8$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \sqrt{e^x+2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 (6 points) :

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$.

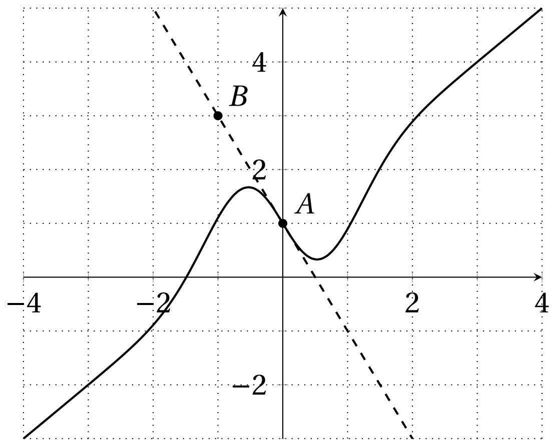


1. Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
2. Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$? Justifier.
3. La courbe semble-t-elle admettre un point d'inflexion? Si oui, donner ses coordonnées approximatives.
4. On suppose à présent que la fonction f est définie sur $[0\,;10]$ par : $f(x) = (2x-1)e^{-x}$.
   Vérifier que : $f'(x) = (-2x+3)e^{-x}$ et que $f''(x) = (2x-5)e^{-x}$.
5. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.
6. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Exercice 3 (10 points) :

Soient a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1+axe^{-x^2}$. Soient les points $A(0\,;1)$ et $B(-1\,;3)$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ représentant f et la droite (AB).



1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
3. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$.
4. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.
5. On admet que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$.
   Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.
6. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $[-2\,;-1]$ tel que $f(c) = 0$.
   Donner une valeur approchée de c à 10^{-2} près.
7. Démontrer que $f''(x) = -6x(2x^2 - 3)\mathrm{e}^{-x^2}$
8. Étudier la convexité de f.