Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. $f(x) = \left(x^2+1\right)^8$ sur $\mathbb{R}$
   Posons : $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = x^8$. On a alors : $f(x) = v(u(x))$.
   D'après le cours, on peut alors écrire : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

   $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 8x^7$; par conséquent : $v'(u(x)) = 8(u(x))^7 = 8(x^2+1)^7$.

   On obtient : $f'(x) = 8(x^2+1)^7 \times 2x = 16x(x^2+1)^7$

2. $g(x) = \sqrt{e^x+2}$ sur $\mathbb{R}$
   Posons : $u(x) = e^x+2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a alors : $f(x) = v(u(x))$.
   Par conséquent : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

   $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; par conséquent : $v'(u(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x+2}}$.

   On obtient : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x+2}} \times e^x = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}}$

Exercice 2 :

1. On voit facilement que le maximum de f est de 4,5 environ .

2. La fonction f semble croissante sur $[0\,;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;10]$.
   Donc sa dérivée est probablement positive sur $[0\,;1{,}5]$ et négative sur $[1{,}5\,;10]$.

3. On trouve un point d'inflexion de coordonnées approximatives $(2{,}5\,;0{,}35)$.

4. On sait d'après la formule de première que la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est : $x \mapsto -e^{-x}$.
   On applique la formule de dérivation d'un produit :
   $f'(x) = 2 \times e^{-x} + (2x-1) \times (-e^{-x}) = (2-2x+1)e^{-x} = (-2x+3)e^{-x}$

   Même méthode pour la dérivée seconde :
   $f''(x) = -2 \times e^{-x} + (-2x+3) \times (-e^{-x}) = (-2+2x-3)e^{-x} = (2x-5)e^{-x}$

5. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.
   $f'(x)$ est du signe de $-2x+3$ car e^{-x} est positif pour tout x.

x	0		$\frac{3}{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$19e^{-10}$

On trouve (calculette) : $2e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0{,}446$ et $19e^{-10} \simeq 8 \times 10^{-4}$

6. On étudie le signe de la dérivée seconde, qui est aussi celui de $2x-5$.

x	0		$\frac{5}{2}$		10
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Ainsi, f est concave sur $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;10\right]$.

Il y a bien un point d'inflexion, de coordonnées $\left(2{,}5\,;4e^{-2{,}5}\right)$ soit approximativement : $(2{,}5\,;0{,}328)$.

Exercice 3 :

1. $f(0) = 0 + 1 + a \times 0 \times 1 = 1$

2. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{1} = -2$

3. Commençons par la dérivée de $x \mapsto e^{-x^2}$. C'est une fonction composée; posons $u(x) = -x^2$ et $v(x) = e^x$.
   Alors $u'(x) = -2x$ et $v'(x) = e^x$ et donc : $v'(u(x)) = e^{-x^2}$.
   Ainsi $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u et v le sont et sa dérivée est donnée par la formule :
   $v'(u(x) \times u'(x) = -2xe^{-x^2}$.

   La formule de dérivation d'un produit nous donne la dérivée de $x \mapsto xe^{-x^2}$.
   On obtient : $1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$

   On multiplie par a et on ajoute la dérivée des premiers termes, on obtient :
   $f'(x) = 1 + a(1-2x^2)e^{-x^2} = 1 - a(2x^2-1)e^{-x^2}$

4. Comme la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0, alors sont coefficient directeur est égal au nombre dérivé de f en 0.
   Calculons $f'(0)$ à l'aide de la formule de la question précédente :
   $f'(0) = 1 - a \times (2 \times 0 - 1) \times e^0 = 1 + a$

   Ainsi : $f'(0) = 1 + a = -2$, d'où : $a = -3$.

5. On suppose : $x \leq -1$
   Alors $x^2 \geq 1$ car la fonction "carré" est décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Faire un dessin...
   Remarque : pour comprendre en maths, il faut faire des dessins, faire des dessins, et faire des dessins.
   On en déduit successivement : $2x^2 - 1 \geq 1$
   $3(2x^2-1) \geq 3$
   $3(2x^2-1)e^{-x^2} > 0$ (car on sait que $e^{-x^2} > 0$)
   Et donc : $1 + 3(2x^2-1)e^{-x^2} > 1$ donc a fortiori : $f'(x) > 0$.

6. Rappel : pour utiliser le théorème de la bijection, il y a trois éléments à préciser : continuité et stricte monotonie de la fonction, et vérifier que la valeur de l'équation est comprise entre deux images connues.

   Ici, f est continue sur $[-2\,;-1]$ (car dérivable) et strictement croissante sur cet intervalle (car sa dérivée est strictement positive, d'après la question précédente.)
   On a d'autre part : $f(-2) = -2+1-3\times(-2)\times \mathrm{e}^{-(-2)^2} = -1+6\mathrm{e}^{-4}$
   Or, $\mathrm{e} > 2$, donc $\mathrm{e}^4 > 16$, donc $\mathrm{e}^{-4} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^4} < \dfrac{1}{16}$, donc $6\mathrm{e}^{-4} < \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$
   donc $-1+6\mathrm{e}^{-4} < -1+\dfrac{3}{8} = -\dfrac{5}{8}$, donc $f(-2) < 0$.

   Et $f(-1) = -1+1-3\times(-1)\mathrm{e}^{-(-1)^2} = 3\mathrm{e}^{-1}$, donc $f(-1) > 0$.

   Ainsi, 0 est compris entre $f(-2)$ et $f(-1)$.
   (On peut aussi utiliser la calculette. On trouve $f(-2) \simeq -0{,}89$ et $f(-1) \simeq 1{,}1$.)

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a donc exactement une solution sur l'intervalle $[-2\,;-1]$. On note c cette solution.

   On trouve à la calculette : $c \simeq -1{,}487848642090176$ soit $c \simeq -1{,}49$.

7. On dérive f'.
   D'après la question 3, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est $x \mapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
   On applique la formule de dérivation d'un produit en posant : $u(x) = 2x^2-1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, sans oublier de multiplier par 3.
   $f''(x) = 3\left(2\times 2x\times \mathrm{e}^{-x^2} + (2x^2-1)\times(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 3\times(4x+(2x^2-1)\times(-2x))\mathrm{e}^{-x^2}$
   $f''(x) = 3(4x-4x^3+2x)\mathrm{e}^{-x^2} = 3(6x-4x^3)\mathrm{e}^{-x^2} = 3\times(-2x)(-3+2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$
   $f''(x) = -6x(2x^2-3)\mathrm{e}^{-x^2}$
8. L'exponentielle étant positive, $f''(x)$ est du signe de $-6x(2x^2-3)$.

   Le trinôme $2x^2-3$ est positif ($a=2$), sauf entre les racines éventuelles.
   Or, $2x^2-3=0$ est équivalent à $x^2 = \dfrac{3}{2}$; donc deux racines : $x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

   On obtient :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-6x$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$2x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right]$ et sur $\left[0\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right]$.

   Elle est concave sur $\left[-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;0\right]$ et sur $\left[\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;+\infty\right[$.