Correction du devoir maison

Exercice n° 71 page 138 :

$(d)\left\{\begin{array}{l} x=-1-2t \\ y=4+4t \\ z=-4-5t \end{array}\right. \qquad (d')\left\{\begin{array}{l} x=7+t' \\ y=8+3t' \\ z=-18-6t' \end{array}\right.$

a. Un vecteur directeur de (d) est : $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d') est : $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\3\\-6\end{pmatrix}$.

Visiblement, les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles ; donc ils ne sont pas colinéaires. Par coséquent, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

b. $\left\{\begin{array}{l} -1-2t=7+t' \\ 4+4t=8+3t' \\ -4-5t=-18-6t' \end{array}\right.$

D'abord, écrivons ce système sous forme habituelle (inconnues au premier membre) :

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ 4t-3t'=4 \\ -5t+6t'=-14 \end{array}\right.$

On va résoudre un sous-système de deux équations à deux inconnues extrait du précédent en choisissant deux lignes, puis on reportera la solution trouvée dans l'autre équation pour savoir si elle est compatible. Les deux premières lignes conviennent :

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ 4t-3t'=4 \end{array}\right.$

On peut résoudre ce système par substitution ou par élimination. Choisissons la méthode par élimination.

Pour éliminer les t, on peut remplacer L_2 (la ligne 2) par L_2+2L_1 (ligne 2 $+2\times$ ligne 1).

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ 4t-3t'+2\times(-2t-t')=4+2\times 8 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ 4t-3t'-4t-2t'=20 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ -5t'=20 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=8 \\ t'=-4 \end{array}\right.$

Remplaçons dans L_1 :

$\left\{\begin{array}{l} -2t+4=8 \\ t'=-4 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} t=-2 \\ t'=-4 \end{array}\right.$

La solution est donc $(-2\,;-4)$. Une petite vérification ne fait pas de mal :

$\left\{\begin{array}{l} -2t-t'=-2\times(-2)-(-4)=4+4=8 \\ 4t-3t'=4\times(-2)-3\times(-4)=-8+12=4 \end{array}\right.$

Ça marche.

On reporte à présent dans la troisième ligne :

$-5t+6t'=-5\times(-2)+6\times(-4)=10-24=-14$

Ainsi, le couple $(-2\,;-4)$ est aussi solution de la troisième ligne ; il est donc solution du système de départ.

c. (d) et (d') sont sécantes si elles admettent un point d'intersection (grande découverte, je sais). Les coordonnées de ce point forment donc une solution *à la fois* de la représentation paramétrique de (d) et de la représentation paramétrique de (d'). Si on appelle $(x\,;y\,;z)$ ces coordonnées, on aura donc :

$$\begin{cases} x = -1-2t = 7+t' \\ y = 4+4t = 8+3t' \\ z = -4-5t = -18-6t' \end{cases}$$

D'après la question **b.**, ce système a une solution. Donc les droites sont sécantes. La solution $(t\,;t')$ de ce système est : $(-2\,;-4)$. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} x = -1-2\times(-2) = 7-4 = 3 \\ y = 4+4\times(-2) = 8+3\times(-4) = -4 \\ z = -4-5\times(-2) = -18-6\times(-4) = 6 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc : $(3\,;-4\,;6)$.

Exercice n° 72 page 138 :

$$(d)\begin{cases} x = 4-3t \\ y = -3+t \\ z = 1+2t \end{cases} \qquad (d')\begin{cases} x = -12+2t' \\ y = 4t' \\ z = 9+3t' \end{cases}$$

(d) et (d') sont non-coplanaires si elles ne sont ni parallèles ni sécantes. On va donc essayer d'éliminer successivement ces deux possibilités.

Pour savoir si elles sont parallèles ou non, il suffit de trouver un vecteur directeur de chacune d'elles et de savoir si ces deux vecteurs ont la même direction.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de (d') est $\vec{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Cherchons à présent si elles ont un point d'intersection. Si c'est le cas, comme dans l'exercice précédent, les coordonnées de ce point vérifient à la fois la représentation paramétrique de (d) et la représentation paramétrique de (d'). Si on appelle $(x\,;y\,;z)$ ces coordonnées, on aura donc :

$$\begin{cases} x = 4-3t = -12+2t' \\ y = -3+t = 4t' \\ z = 1+2t = 9+3t' \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à résoudre (en t et t') ce système. Écrivons-le sous la forme habituelle :

$$\begin{cases} -3t-2t' = -16 \\ t-4t' = 3 \\ 2t-3t' = 8 \end{cases}$$

Conservons par exemple les deux premières lignes et résolvons le système qu'elles constituent :

$$\begin{cases} -3t-2t' = -16 \\ t-4t' = 3 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par substitution ou par élimination. Choisissons la méthode par substitution. On peut facilement exprimer t en fonction de t' dans L_2 :

$$\begin{cases} -3t-2t' = -16 \\ t = 4t'+3 \end{cases}$$

On remplace dans L_1 :

$\begin{cases} -3 \times (4t' + 3) - 2t' = -16 \\ t = 4t' + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -14t' - 9 = -16 \\ t = 4t' + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -14t' = -7 \\ t = 4t' + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{2} \\ t = 4t' + 3 \end{cases}$

On remplace dans L_2 :

$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{2} \\ t = 4 \times \dfrac{1}{2} + 3 = 2 + 3 = 5 \end{cases}$

On remplace la solution $\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$ du sous-système dans la troisième ligne :

$2t - 3t' = 2 \times 5 - 3 \times \dfrac{1}{2} = 10 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{17}{2} \neq 8.$

Le couple $\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$ n'est pas solution de la troisième équation, donc le système $\begin{cases} -3t - 2t' = -16 \\ t - 4t' = 3 \\ 2t - 3t' = 8 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Par conséquent, les droites (d) et (d') ne sont pas sécantes.

Comme (d) et (d') ne sont ni parallèles, ni sécantes, alors elles ne sont pas coplanaires.