# Corrigé du devoir surveillé n° 2

## Exercice 1 :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$) ne sont pas coplanaires, car si c'était le cas, le point $S$ appartiendrait au plan $(ABC)$ (la base de la pyramide), ce qui est impossible.
   Par conséquent, $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AS})$ est bien un repère de l'espace.

2. Par définition, on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

   Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, on obtient : $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

   Comme $I$ est le milieu de $[SB]$, alors $I\begin{pmatrix}\dfrac{x_S + x_B}{2}\\\dfrac{y_S + y_B}{2}\\\dfrac{z_S + z_B}{2}\end{pmatrix}$, soit : $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

   Comme $J$ est le milieu de $[SD]$, alors $J\begin{pmatrix}\dfrac{x_S + x_D}{2}\\\dfrac{y_S + y_D}{2}\\\dfrac{z_S + z_D}{2}\end{pmatrix}$, soit : $J\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

   On a : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AS}$. Donc $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0\\0\\2/3\end{pmatrix}$, et ainsi : $K\begin{pmatrix}0\\0\\2/3\end{pmatrix}$.

   Comme $L$ est le milieu de $[IJ]$, alors $L\begin{pmatrix}\dfrac{x_I + x_J}{2}\\\dfrac{y_I + y_J}{2}\\\dfrac{z_I + z_J}{2}\end{pmatrix}$, soit : $L\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/2\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}x_L - x_C\\y_L - y_C\\z_L - z_C\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}-3/4\\-3/4\\1/2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}x_K - x_C\\y_K - y_C\\z_K - z_C\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2/3\end{pmatrix}$.

   On constate à partir des coordonnées que : $\overrightarrow{CL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CK}$.

   Par conséquent, $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires. Et donc, les points $C$, $K$ et $L$ sont alignés.

4. $E$ est symétrique de $A$ par rapport à $D$. Donc $E$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On en déduit : $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

   On constate à partir des coordonnées que $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{EK}$. Donc ces vecteurs sont colinéaires.
   Par conséquent, les points $E$, $J$ et $K$ sont alignés.

5. D'après la question 3, on a : $\overrightarrow{CL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CK}$. Par conséquent, $L$ n'est pas le milieu de de $[CK]$.
   Or, si $ICJK$ était un parallélogramme, ses diagonales se couperaient en leur milieu, et $L$ serait le milieu de $[CK]$.
   Ainsi, $ICJK$ n'est pas un parallélogramme.

## Exercice 2 :

1. On remplace $x$, $y$ et $z$ par les coordonnées de $A$ dans la représentation paramétrique de $(d)$. On obtient un système de 3 équations à une inconnue ($t$), qu'on résout :

   $$\begin{cases} -22 = 6 + t \\ 3 = -1 + 3t \\ 12 = 4 + 2t \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} t = -28 \\ t = \dfrac{4}{3} \\ t = 4 \end{cases}$$

   La valeur trouvée est différente pour chaque équation ; le système n'a pas de solution. Donc $A$ n'appartient pas à la droite $(d)$.

   Même méthode pour la droite $(d')$ :

   $$\begin{cases} -22 = -2 + 4s \\ 3 = 8 + s \\ 12 = 12 \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} s = -5 \\ s = -5 \\ s = \text{quelconque} \end{cases}$$

   La valeur trouvée est la même pour les deux premières équations, et la troisième est une égalité toujours vraie. Donc le système a une solution. Donc, $A$ appartient à la droite $(d')$.

2. Un vecteur directeur de $(d)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $(d')$ est $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles ; ils ne sont donc pas colinéaires. Par conséquent, $(d)$ et $(d')$ ne sont pas parallèles.

3. $(d)$ et $(d')$ sont sécantes si et seulement si les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de leur point d'intersection forment une solution des deux représentations paramétriques, c'est à dire :

$$\begin{cases} x = 6+t \\ y = -1+3t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2+4s \\ y = 8+s \\ z = 12 \end{cases}$$

Autrement dit, ceci équivaut à ce que le système suivant ait une solution $(t\,;s)$ :

$$\begin{cases} 6+t = -2+4s \\ -1+3t = 8+s \\ 4+2t = 12 \end{cases}$$

De la troisième ligne, on tire facilement : $t = 4$ ; remplaçant dans chacune des deux premières lignes, on trouve :

$$\begin{cases} 10 = -2+4s \\ 11 = 8+s \\ t = 4 \end{cases} \quad \text{soit :} \begin{cases} s = 3 \\ s = 3 \\ t = 4 \end{cases}$$

Le système a pour solution : $(t\,;s) = (4\,;3)$ ; donc les deux droites sont sécantes.
Les coordonnées de leur point d'intersection sont données par :

$$\begin{cases} x = 6+t = 6+4 = 10 \\ y = -1+3t = -1+3\times 4 = 11 \\ z = 4+2\times 4 = 12 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2+4s = -2+4\times 3 = 10 \\ y = 8+s = 8+3 = 11 \\ z = 12 \end{cases}$$

Ainsi, $I$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

4. La droite $(\delta)$ est parallèle à $d$, donc a les mêmes vecteurs directeurs, par exemple $\vec{u}$. Comme d'autre part elle passe par $B$, elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = -8+3t \\ z = 2t \end{cases}$

5. Les droites $(\delta)$ et $(d')$ ne peuvent pas être parallèles, sinon $(d)$ et $(d')$ le seraient aussi, ce qui est faux d'après la question 2.
Cherchons si elles sont sécantes. Par le même raisonnement que pour la question 3, c'est le cas si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} t = -2+4s \\ -8+3t = 8+s \\ 2t = 12 \end{cases}$$

Comme précédemment, la troisième ligne donne : $t = 6$ et donc :

$$\begin{cases} 6 = -2+4s \\ 10 = 8+s \\ t = 6 \end{cases} \quad \text{soit :} \begin{cases} s = 2s \\ s = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

Le système a pour solution $(t\,;s) = (6\,;2)$, donc les deux droites sont concourantes.
Par conséquent, $(\delta)$ et $(d')$ sont coplanaires.