Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.
   En effet, s'ils étaient coplanaires, les points A, B, C et S appartiendraient à un même plan. Donc S appartiendrait au plan (ABD) (la base de la pyramide), ce qui est impossible.

   Une autre façon de le dire est celle-ci : Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, ne sont pas colinéaires, $(A\,;\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD})$ forme un repère du plan (ABD). Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ étaient coplanaires, le vecteur $\overrightarrow{AS}$ serait combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et donc S appartiendrait au plan (ABD), ce qui est impossible.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont coplanaires.
   En effet, comme la base de la pyramide est un hexagone régulier, alors on a :
   $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$ (relation de Chasles).
   Ainsi, $\overrightarrow{ED}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont coplanaires.
   Même raisonnement. Comme la base de la pyramide est un hexagone régulier, alors on a :
   $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ (relation de Chasles de nouveau).
   Ainsi, $\overrightarrow{FD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

4. $\overrightarrow{SG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SD}$, donc, d'après la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{SG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$
   Ainsi, on passe de S à G en passant par A puis en se déplaçant sur la droite (AD). G appartient donc à (AD), qui est incluse dans le plan (ABC) (la base de la pyramide).
   On peut aussi écrire :
   $\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$
   soit : $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$
   et donc : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2 :

1. On trouve $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $I\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$.

2. On en déduit : $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\1\\-1\end{pmatrix}$.

3. Cherchons s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{EK} = a\overrightarrow{EI} + b\overrightarrow{EJ}$.
   En passant aux coordonnées, cette égalité équivaut au système :
   $$\begin{cases} -\dfrac{2}{3} = a \times 0 + b \times (-1) \\ 1 = a \times \dfrac{1}{2} + b \times 1 \\ -1 = a \times (-1) + b \times -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{soit :} \begin{cases} -\dfrac{2}{3} = -b \\ 1 = \dfrac{a}{2} + b \\ -1 = -a - \dfrac{b}{2} \end{cases}$$
   La première ligne donne facilement $b = \dfrac{2}{3}$.
   Reportant dans la deuxième, on trouve : $\dfrac{a}{2} = 1 - b = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ d'où $a = \dfrac{2}{3}$.

On remplace dans la troisième ligne : $-a-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=-1.$

L'égalité est vérifiée, le couple $(a\,;b)=\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$ est donc solution du système.

On en déduit : $\overrightarrow{EK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EI}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EJ}$. Par conséquent, ces trois vecteurs sont coplanaires.

Et donc, les points E, I, J, K sont coplanaires.

Exercice 3 :

1. Pour savoir si A appartient à (d), on remplace x, y et z dans la représentation paramétrique de (d) par les coordonnées de A :
$$\begin{cases} 21=3+2t \\ 10=1+t \\ 18=2t \end{cases}$$
On trouve la même solution : $t=9$ pour les trois équations. Donc A appartient à (d).
Pour savoir si A appartient à (d'), on remplace x, y et z dans la représentation paramétrique de (d') par les coordonnées de A :
$$\begin{cases} 21=5+4s \\ 10=5+3s \\ 18=-1+3s \end{cases}$$
On trouve la solution $s=4$ pour la première ligne et $s=\dfrac{5}{3}$ pour la deuxième. Le système n'a pas de solution. Donc A n'appartient pas à (d').

2. On voit que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

   Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

3. Il s'agit de montrer qu'il existe un point dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient à la fois la représentation paramétrique de (d) et celle de (d').
On résout donc le système :
$$\begin{cases} x=3+2t=5+4s \\ y=1+t=5+3s \\ z=2t=-1+3s \end{cases}$$
On regroupe :
$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} 2t-4s=2 \\ t-3s=4 \\ 2t-3s=-1 \end{cases}$$
Considérons le sous-système formé des deux dernières lignes :
$$\begin{cases} t-3s=4 \\ 2t-3s=-1 \end{cases} \quad \text{Remplaçons la deuxième ligne, } L_2\text{, par } L_2-L_1$$
$$\begin{cases} t-3s=4 \\ 2t-3s-t+3s=-1-4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} t-3s=4 \\ t=-5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -5-3s=4 \\ t=-5 \end{cases}$$

$\begin{cases} s = -3 \\ t = -5 \end{cases}$

Remplaçons dans la première ligne du système (S) : $2t - 4s = 2 \times (-5) - 4 \times (-3) = -10 + 12 = 2$.

Donc, le couple $(t\,;s) = (-5\,;-3)$ est solution du système. Par conséquent, les deux droites sont sécantes.

Les coordonnées de I sont :

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \times (-5) = 5 + 4 \times (-3) = -7 \\ y = 1 - 5 = 5 + 3 \times (-3) = -4 \\ z = 2 \times (-5) = -1 + 3 \times (-3) = -10 \end{cases}$$

Donc : $I(-7\,;-4\,;-10)$.

4. La droite (δ) est parallèle à d, donc elle admet $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
Comme elle passe par $B(1\,;0\,;-4)$, on obtient une représentation paramétrique :

$$(\delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

5. Les droites (δ) et (d) sont bien sûr coplanaires, puisqu'elles sont parallèles.

6. Les droites (δ) et (d') ne sont pas parallèles ; on cherche donc si elles sont sécantes.
Comme dans la question 3, on résout le système :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t = 5 + 4s \\ y = t = 5 + 3s \\ z = -4 + 2t = -1 + 3s \end{cases}$$

On regroupe :

$$(\text{S'}) : \begin{cases} 2t - 4s = 4 \\ t - 3s = 5 \\ 2t - 3s = 3 \end{cases}$$

Considérons, comme précédemment, le sous-système formé des deux dernières lignes :

$\begin{cases} t - 3s = 5 \\ 2t - 3s = 3 \end{cases}$ Remplaçons L_2 par $L_2 - L_1$

$$\begin{cases} t - 3s = 5 \\ 2t - 3s - t + 3s = 3 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - 3s = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 - 3s = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\dfrac{7}{3} \\ t = -2 \end{cases}$$

Remplaçons dans la première ligne du système (S') :

$2t - 4s = 2 \times (-2) - 4 \times \left(-\dfrac{7}{3}\right) = -4 + \dfrac{28}{3} = \dfrac{16}{3} \neq 4$.

Donc, le système (S') n'a pas de solution. Par conséquent, les deux droites ne sont pas sécantes.

Comme elles ne sont ni sécantes, ni parallèles, elles ne sont pas coplanaires.