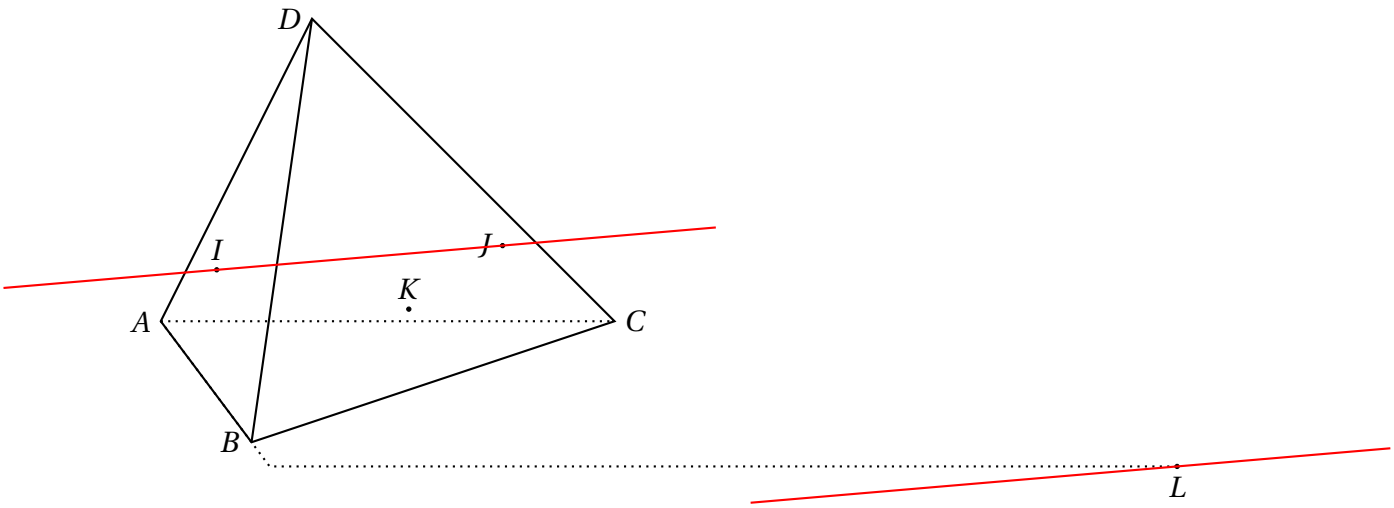
Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :



1. I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$; ceci signifie que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc ces vecteurs sont coplanaires, donc les points A, B, D, I aussi.

2. On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

   D'après les coordonnées, on voit que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$. Cela montre que ces trois vecteurs sont coplanaires, donc aussi les points B, C, D et K.

3. On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   D'après les coordonnées, on voit que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Cela montre que ces trois vecteurs sont coplanaires.

4. La droite (IJ) admet $\overrightarrow{IJ}$ comme vecteur directeur, et d'après la question 3, celui-ci appartient à la direction du plan (ABC), donnée par $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

   Donc (IJ) est parallèle (au sens large) au plan (ABC), c'est à dire : soit strictement parallèle à (ABC), soit contenue dans (ABC).

   Or, le point I n'appartient pas à (ABC) puisque $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
   Donc la droite (IJ) n'est pas incluse dans (ABC) ; et donc elle est strictement parallèle à (ABC).

5. D'après les coordonnées de L, on peut écrire : $\overrightarrow{AL} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Donc L appartient au plan (ABC).

6. On a : $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1/20 \end{pmatrix}$.

   On voit que les coordonnées sont proportionnelles : $\overrightarrow{IL} = 5\overrightarrow{IK}$.

   Donc L appartient à la droite (IK).

7. Remarquons que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{20}\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

   L appartient à (ABC) (question 5)
   et à (IK) (question 6).
   D'autre part, (IK) est sécante à (ABC) car $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

   Donc (IK) est sécante à (ABC) en L.

8. Notons que L appartient à la fois à (ABC) (question 5) et à (IJK), puisqu'il appartient à (IK), qui est incluse dans (IJK).

   Ainsi, les plans (IJK) et (ABC) ne sont pas parallèles :
   Ils ne sont pas confondus car I n'appartient pas à (ABC) ; et ils ne sont pas strictement parallèles, car L appartient aux deux plans.

   Ils sont donc sécants, leur intersection est une droite. Cette droite passe par (L), puisque L est un point commun à (IJK) et (ABC).

   La droite d est parallèle à (IJ), donc admet $\overrightarrow{IJ}$ comme vecteur directeur. Or $\overrightarrow{IJ}$ appartient à la direction du plan (ABC). Donc d est parallèle à (ABC) (au sens large), et comme elle contient L, qui est dans (ABC), elle est incluse dans (ABC).

   D'autre part, $\overrightarrow{IJ}$ appartient aussi à la direction du plan (IJK). Donc d est parallèle à (IJK) (au sens large), et comme elle contient L, qui est dans (IJK), elle est incluse dans (IJK).

   Par conséquent, la droite d est la droite d'intersection de (IJK) et (ABC).

Exercice 2 :

1. A appartient à (d) car ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (d) (pour la valeur $t = 2$).

   A n'appartient à (d) car ses coordonnées ne vérifient pas la représentation paramétrique de (d') (la première ligne donne : $s = 6$ et la seconde ligne : $s = -9/2$).

2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').
   Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

   Par conséquent, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

3. Les droites (d) et (d') sont sécantes s'il existe un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ qui appartiennent aux deux droites ; les coordonnées de ce point doivent donc vérifier les représentations paramétriques de chacune des droites (d) et (d'). Réciproquement, si le triplet $(x\,;y\,;z)$ est solution des représentations paramétriques de (d) et (d'), alors il constitue les coordonnées d'un point appartenant à la fois à (d) et à d'.

   Donc, les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant a une solution :
$$\begin{cases} x = 1+3t = 1-s \\ y = 7-3t = 10+2s \quad (*) \\ z = 2+2t = -5-3s \end{cases}$$

   On résout le système :
$$\begin{cases} 1+3t = 1-s \\ 7-3t = 10+2s \\ 2+2t = -5-3s \end{cases}$$
   qu'on peut écrire sous la forme plus habituelle :
$$\begin{cases} 3t+s = 0 \\ -3t-2s = 3 \\ 2t+3s = -7 \end{cases}$$

   On voit qu'il suffit de remplacer la ligne 1 par la somme ligne 1 + ligne 2 pour se débarrasser des t :
$$\begin{cases} -s = 3 \\ -3t-2s = 3 \\ 2t+3s = -7 \end{cases}$$

   On trouve $s = -3$ et on remplace dans les deux autres lignes :
$$\begin{cases} s = -3 \\ -3t+6 = 3 \\ 2t-9 = -7 \end{cases}$$
   Et donc :
$$\begin{cases} s = -3 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

   Le système a pour solution $(t = 1\,;s = -3)$. Donc les droites sont sécantes. On remplace dans le système de départ (*) pour trouver les coordonnées du point d'intersection.
$$\begin{cases} x = 1+3\times 1 = 1-(-3) = 4 \\ y = 7-3\times 1 = 10+2\times(-3) = 4 \\ z = 2+2\times 1 = -5-3\times(-3) = 4 \end{cases}$$

   Le point d'intersection a donc pour coordonnées : $(4\,;4\,;4)$