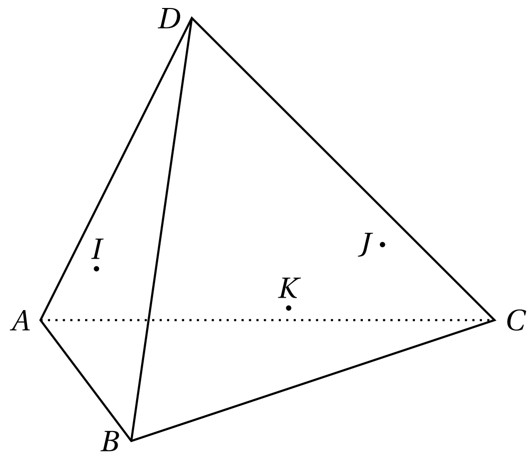
Mathématiques - Devoir surveillé n° 3

Exercice 1 (14 points) :

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous.



L'espace est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$. On considère les points $I\left(\frac{1}{5};0;\frac{1}{4}\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$, $K\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

1. Démontrer que le point I appartient au plan (ABD).
2. Démontrer que le point K appartient au plan (BCD).
   On admet que que le point J appartient au plan (ACD).
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
4. En déduire que la droite (IJ) est strictement parallèle au plan (ABC) (« strictement parallèle » signifie « parallèle à », mais non « incluse dans »).
5. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{6}{5};2;0\right)$. Placer L sur le dessin.
   Démontrer que L appartient au plan (ABC).
6. Démontrer que L appartient à la droite (IK).
7. En déduire que L est le point d'intersection de la droite (IK) et du plan (ABC).
8. Démontrer que l'intersection des plans (IJK) et (ABC) est la droite d parallèle à (IJ) passant par L. Tracer d sur le dessin.

Exercice 2 (6 points) :

On considère deux droites (d) et (d') définies par leur représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 7-3t \\ z = 2+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } (d') : \begin{cases} x = 1-s \\ y = 10+2s \\ z = -5-3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

1. Le point $A(7;1;6)$ appartient-il à (d) ? Appartient-il à (d') ?
2. Démontrer que (d) et (d') ne sont pas parallèles.
3. Démontrer que (d) et (d') sont sécantes.
   Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.