Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1.a) $\ln(3x^2) - \ln(12x^3) + \ln(4x^5)$
$= \ln(3) + 2\ln(x) - \ln(12) - 3\ln(x) + \ln(4) + 5\ln(x)$
$= 4\ln(x) + \ln(3) - \ln(3) - \ln(4) + \ln(4)$
$= 4\ln(x)$

b) $\ln\left(\dfrac{x^5}{27}\right) - \ln\left(\dfrac{e^2}{(3x)^3}\right)$
$= 5\ln(x) - \ln(27) - \ln\left(e^2\right) + \ln\left(3^3x^3\right)$
$= 5\ln(x) - 3\ln(3) - 2\ln(e) + 3\ln(3) + 3\ln(x)$
$= 8\ln(x) - 2$

2.a) $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(3) + \ln(2x+7)$
Valeurs possibles :
$\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x+7 > 0 \end{cases}$ la première condition implique les deux autres, donc : $x \in]0\,;+\infty[$

$\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(3) + \ln(2x+7)$
$\ln(x(x+2)) = \ln(3(2x+7))$
$x(x+2) = 3(2x+7)$
$x^2 + 2x = 6x + 21$
$x^2 - 4x - 21 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100$
Deux racines : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{100}}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{100}}{2} = 7$
Seule la deuxième racine appartient à $]0\,;+\infty[$. Donc la solution de l'équation de l'énoncé est : $x = 7$.

b) $\ln(4x+2) \geq \ln(3) + \ln(x+1)$
Valeurs possibles :
$\begin{cases} 4x+2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ équivalent à : $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$
la première condition implique l'autre, donc : $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$
$\ln(4x+2) \geq \ln(3) + \ln(x+1)$
équivaut à : $e^{\ln(4x+2)} \geq e^{\ln(3)+\ln(x+1)}$
implique : $4x+2 \geq 3(x+1)$
$4x + 2 \geq 3x + 3$
$x \geq 1$
On vérifie que l'ensemble $[1\,;+\infty[$ est inclus dans l'ensemble des valeurs permises pour x, $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
Donc l'ensemble solution est $[1\,;+\infty[$.

Exercice 2 :

1.a) On développe :

$f(x) = x^2(4\ln x + 1) = 4x^2\ln(x) + x^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ d'après le cours, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$, donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 4x^2\ln(x) = 0$

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 4x^2\ln(x) + x^2 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\ln(x) + 1 = +\infty$

Donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(4\ln x + 1) = +\infty$

c) En 0 : limite finie, donc pas d'asymptote.

En $+\infty$: limite infinie, donc pas d'asymptote.

2.a) $f'(x) = 2x(4\ln x + 1) + x^2 \times \dfrac{4}{x} = 8x\ln(x) + 2x + 4x = 2x(4\ln(x) + 3)$

b) $2x > 0$ lorsque x appartient à $]0\,;+\infty[$; $f'(x)$ est donc du signe de $4\ln(x) + 3$.

On résout par exemple : $4\ln(x) + 3 \geq 0$

$\ln(x) \geq -\dfrac{3}{4}$

$x \geq \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$

c) On en déduit le tableau :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 0	↘	$-2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	↗	$+\infty$

$f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)^2\left(4\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right) + 1\right) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\times 2}\left(4 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) + 1\right) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}(-3 + 1) = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \simeq -0{,}446$

3.a) A appartient à l'axe des abscisses ; donc $y_A = 0$.

On résout : $f(x) = 0$

$x^2(4\ln x + 1) = 0$

On peut simplifier par x^2 puisque $x > 0$.

$4\ln(x) + 1 = 0$

$\ln(x) = -\dfrac{1}{4}$

$x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \simeq 0{,}779$

Donc $A\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;0\right)$

b) On déduit du tableau de variation le signe de $f(x)$:

x	0		$e^{-\frac{3}{4}}$		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

4.

Initialisation :	Affecter à x la valeur 0,01
Traitement :	Tant que $x^2(4\ln x+1)<0$:
	$x \leftarrow x+0{,}01$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher x

On sort de la boucle lorsque $f(x) \geq 0$. Comme x varie par pas de 0,01, on voit que la valeur de sortie est une valeur approchée de x_Aà 10^{-2}.
On voit à la calculatrice que la valeur de sortie est le premier nombre à deux décimales qui dépasse 0,779, c'est à dire 0,78.

Exercice 3 :

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\19\\14\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-10\\-13\\-17\end{pmatrix}$

   On peut chercher par exemple à exprimer $\overrightarrow{AD}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$
   $\begin{cases} -10 = a-9b \\ -13 = 19a+6b \\ -17 = 14a-3b \end{cases}$
   D'après la première ligne, on a : $a = 9b-10$; on remplace dans les deux lignes suivantes :
   $\begin{cases} a = 9b-10 \\ -13 = 19(9b-10)+6b \\ -17 = 14(9b-10)-3b \end{cases}$

   $\begin{cases} a = 9b-10 \\ -13 = 171b-190+6b \\ -17 = 126b-140-3b \end{cases}$

   $\begin{cases} a = 9b-10 \\ 177 = 177b \\ 123 = 123b \end{cases}$

   $\begin{cases} a = 9\times 1-10 = -1 \\ b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$
   Le système a pour solution : $(a=-1\,;b=1)$ ce qui donne : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   Les points sont bien coplanaires.

   Évidemment, il y a plus astucieux. Comme la question suivante demande de prouver que $ABCD$ est un losange, on peut essayer de prouver directement que $ABCD$ est un parallélogramme.

   Or, on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\19\\14\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\19\\14\end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; donc $ABCD$ est un parallélogramme et donc les points A, B, C, D sont coplanaires.

2. Si on a démontré que $ABCD$ est un parallélogramme, il suffit pour démontrer que c'est un losange de vérifier que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
   Or : $AB = \sqrt{1^2+19^2+14^2} = \sqrt{558}$ et $AD = \sqrt{(-10)^2+(-13)^2+(-17)^2} = \sqrt{558}$.
   Si on n'a pas démontré que $ABCD$ est un parallélogramme, il suffit de calculer les longueurs des deux autres côtés :
   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-13\\-17\end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{(-10)^2+(-13)^2+(-17)^2} = \sqrt{558}$
   et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-19\\-14\end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{(-1)^2+(-19)^2+(-14)^2} = \sqrt{558}$
   Tous les côtés ont la même longueur, donc $ABCD$ est bien un losange.

3. Comme $ABCD$ est un losange, ABD est isocèle en A; donc la hauteur issue de A passe par le milieu I de $[BD]$. Par conséquent la distance de A à la droite (DB) est AI.
   On a : $I\left(\dfrac{4-7}{2};\dfrac{19-13}{2};\dfrac{15-16}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2};3;-\dfrac{1}{2}\right)$.
   Donc : $\overrightarrow{AI}\left(-\dfrac{9}{2};3;-\dfrac{3}{2}\right)$.
   Donc : $AI = \sqrt{\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2+3^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{81}{4}+9+\dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{81+36+9}{4}} = \sqrt{\dfrac{126}{4}} = \dfrac{\sqrt{126}}{2}$.

4. L'aire du losange vaut deux fois l'aire du triangle ADB.
   Celle-ci vaut : $\mathscr{A}_{ADB} = \dfrac{DB\times AI}{2}$.
   $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}11\\32\\31\end{pmatrix}$ donc $DB = \sqrt{11^2+32^2+31^2} = \sqrt{2106}$
   Donc : $\mathscr{A}_{ADB} = \dfrac{\sqrt{2106}\times\dfrac{\sqrt{126}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2106\times126}}{4} = \dfrac{\sqrt{265356}}{4} = \dfrac{2\sqrt{66339}}{4} = \dfrac{\sqrt{66339}}{2}$.
   Par conséquent, l'aire du losange est : $\mathscr{A}_{ABCD} = \sqrt{66339} \simeq 257{,}6$ unités d'aire.

5. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\-19\\-14\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-13\\-17\end{pmatrix}$
   Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -1\times(-10)-19\times(-13)-14\times(-17) = 495$
6. On a d'après le cours : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$
   Donc, $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{495}{\sqrt{558}^2} = \dfrac{495}{558} \simeq 0{,}887096774$.
   On trouve à la calculatrice : $\widehat{ABC} \simeq 27{,}5°$.

Exercice 4 :

1. Un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0$.

Donc les deux vecteurs sont orthogonaux. Par conséquent, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

Un point $M(x\,;y\,;z)$ est sur la droite d'intersection des deux plans s'il appartient aux deux plans à la fois. Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} -2x+2y+3z-8=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

Choisissons par exemple : $x = 0$. Alors $y = -2$ (d'après la 2$^{\text{e}}$ ligne) et donc : $-4+3z-8=0$, soit $z = 4$.

On trouve $M(0\,;-2\,;4)$

Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection s'il appartient à la fois à la direction du plan $\mathscr{P}_1$ et à celle de $\mathscr{P}_2$.

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à la fois à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$. Donc $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de $\vec{u}$ vérifient donc le système :

$$\begin{cases} -2x+2y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Prenons par exemple $x = 3$; on en déduit : $y = -3$ (par la 2$^{\text{e}}$ ligne) puis $z = 4$.

Donc un vecteur directeur est $\vec{u}(3\,;-3\,;4)$.

2. Soient $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées de H.

   Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$, donc colinéaire à $\vec{n}_1$. Posons alors : $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}_1$.

   $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+8 \\ z+12 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Donc : $\begin{cases} x-4=-2t \\ y+8=2t \\ z+12=3t \end{cases}$, soit : $\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=2t-8 \\ z=3t-12 \end{cases}$

   D'autre part, H appartient à $\mathscr{P}_1$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de celui-ci.

   On remplace x, y et z par leur expression en fonction de t :

   $-2(-2t+4)+2(2t-8)+3(3t-12)-8=0$

   $4t-8+4t-16+9t-36-8=0$

   $17t-68=0$

   $t=\dfrac{68}{17}=4$

   On remplace :

   $$\begin{cases} x=-2\times 4+4=-4 \\ y=2\times 4-8=0 \\ z=3\times 4-12=0 \end{cases}$$

   Donc H a pour coordonnées : $(-4\,;0\,;0)$.