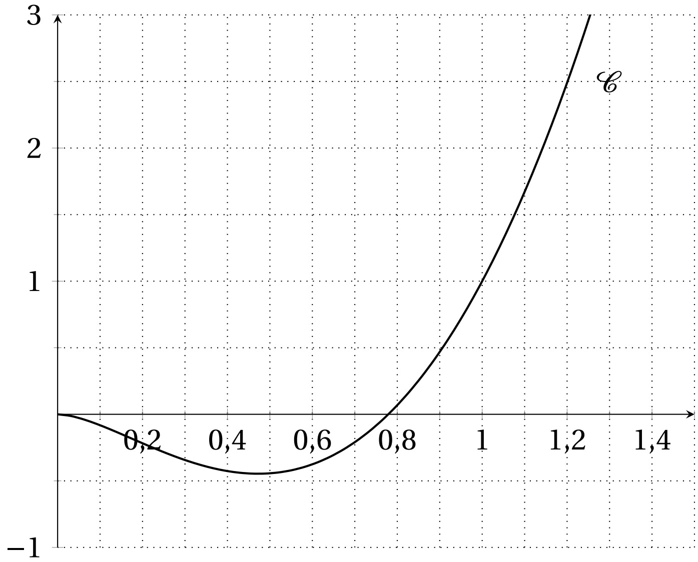
Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 (4 points) :

1. Simplifier et exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln(x)$:
   a) $\ln(3x^2) - \ln(12x^3) + \ln(4x^5)$
   b) $\ln\left(\dfrac{x^5}{27}\right) - \ln\left(\dfrac{e^2}{(3x)^3}\right)$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (définir les valeurs possibles pour x) :
   a) $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(3) + \ln(2x+7)$
   b) $\ln(4x+2) \geq \ln(3) + \ln(x+1)$

Exercice 2 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2\,(4\ln x + 1)$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dessinée ci-dessous.



1.a) Étudier la limite de f en 0.
   b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2.a) Déterminer la dérivée f' de f sur $]0\,;+\infty[$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3.a) On admet que $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de A. Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3}.
   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	Affecter à x la valeur 0,01
Traitement :	Tant que $x^2\,(4\ln x + 1) < 0$:
	$x \leftarrow x + 0{,}01$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher x

Que permet de calculer cet algorithme ?

Déterminer le résultat affiché par cet algorithme.

Exercice 3 (6 points) :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On donne les points $A(3;0;1)$, $B(4;19\,15)$, $C(-6;6;-2)$ et $D(-7;-13;-16)$.

1. Démontrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
3. En considérant le triangle ABD, calculer la distance du point A à la droite (DB).
4. En déduire l'aire du losange.
5. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
6. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à 0,1°près.

Exercice 4 (4 points) :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On définit deux plans par une équation cartésienne :

$\mathscr{P}_1 : -2x + 2y + 3z - 8 = 0$

$\mathscr{P}_2 : x + y + 2 = 0$

1. Étudier la position relative de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et déterminer si possible un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
2. Soit A le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_1$.