Mathématiques - Devoir surveillé n° 6

Exercice 1 (5 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

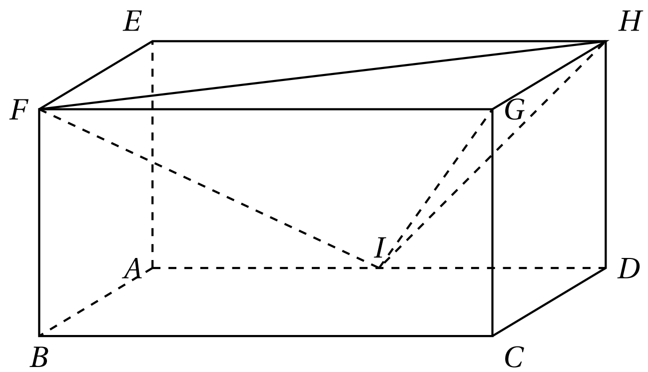
On considère les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $C(-3\ ;0\ ;\ 2)$.

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1 : x + y - 2z + 2 = 0$, et $\mathscr{P}_2 : x - 2y + 6z = 0$, deux plans.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+2t \\ y &=& 2-8t \\ z &=& 1-3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 2 (5 points) :

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

Soit I le milieu de [AD].



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points I, F, G, H.
2. Montrer que le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.
3. a) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   b) Calculer l'aire du triangle FIH.
   c) En exprimant $\mathscr{V}$ d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
4. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.
   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH). En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
   b) Montrer que le projeté orthogonal de G sur le plan (FIH) a pour coordonnées : $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

5.a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ? Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

b) Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

Exercice 3 (10 points) :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x^2+x+1\right)$.

Partie A :

1. Déterminer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.
   Préciser une valeur approchée des extrema éventuels.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et compléter le tableau.
4. Démontrer que $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x^2-7x+3\right)$.
   Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f.

Partie B :

Soit g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Démontrer que $g''(x) = f''(x)$ et en déduire les variations de g' sur $[0;3]$.
2. Démontrer que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;3]$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, sur $[0;3]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près et vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.
4. Si la fonction f est concave sur l'intervalle I, on admet que pour tout $c \in I$, le taux de variation T_c entre c et x, défini sur $[a;b]$ privé de c par : $T_c(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est une fonction décroissante.

   Démontrer alors que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};3\right]$ privé de α, $\dfrac{f(3)-\alpha}{3-\alpha} \leqslant \dfrac{f(x)-\alpha}{x-\alpha} \leqslant \dfrac{f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\alpha}{\dfrac{1}{2}-\alpha}$.

   En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};3\right]$ privé de α, $-0{,}4 \leqslant \dfrac{f(x)-\alpha}{x-\alpha} \leqslant 0{,}4$.

   On en déduit en passant aux valeurs absolues que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};3\right]$: $|f(x)-\alpha| \leqslant 0{,}4|x-\alpha|$.

Partie C :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer par récurrence que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout n, $|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}4^n|u_0-\alpha|$ (utiliser la question B-4).
3. En déduire, par comparaison, que (u_n) a pour limite α.