Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 (5 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-3\,;0\,;\,2)$.

1.a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc : $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-5}$

b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Donc : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

$AB=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$ et $AC=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

Donc : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{-5}{\sqrt{17}\times\sqrt{2}}$

On trouve à la calculatrice : $\boxed{\widehat{BAC}\simeq 149°}$

c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

L'angle $\widehat{BAC}$ ne mesure ni 0° ni 180° ; donc les points ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.

Les points A, B, C ne sont pas alignés, donc ils déterminent un plan. Il suffit donc de vérifier que leurs coordonnées vérifient l'équation de l'énoncé.

Les coordonnées de A vérifient l'équation car $2\times(-2)-0+2\times1+2=0$.
Les coordonnées de B vérifient l'équation car $2\times1-2+2\times(-1)+2=0$.
Les coordonnées de C vérifient l'équation car $2\times(-3)-0+2\times2+2=0$.
Donc (ABC) admet bien pour équation : $2x-y+2z+2=0$.

On peut aussi répondre à la question en montrant que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Or, on vérifie facilement que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

3. Soient $\mathscr{P}_1 : x+y-2z+2=0$, et $\mathscr{P}_2 : x-2y+6z=0$, deux plans.
Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2+2t\\y&=&2-8t\\z&=&1-3t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$; $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$.

Les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Leur intersection est une droite (c'est du cours) qui est incluse à la fois dans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Pour vérifier que la droite $\mathscr{D}$ déterminée par le système d'équations paramétriques donné dans l'énoncé est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, il suffit donc de vérifier que si les coordonnées d'un point donnent une solution de ce système, alors elles donnent aussi une solution de l'équation cartésienne de chacun des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Soit M le point de coordonnées $\begin{pmatrix}-2+2t\\2-8t\\1-3t\end{pmatrix}$.

On reporte ces coordonnées dans l'équation de $\mathscr{P}_1$:

$(-2+2t)+(2-8t)-2(1-3t)+2=0$, donc $\mathrm{M}\in\mathscr{P}_1$

On reporte les coordonnées de M dans l'équation de $\mathscr{P}_2$:

$(-2+2t)-2(2-8t)+6(1-3t)=0$, donc $\mathrm{M}\in\mathscr{P}_2$

Ainsi $\mathrm{M}\in\mathscr{D}$ implique $\mathrm{M}\in\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$. Donc : $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\mathscr{D}$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Pour vérifier que $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle au plan (ABC), il suffit de vérifier qu'un de ses vecteurs directeurs n'est pas orthogonal à $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, normal au plan (ABC).

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-8\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ (d'après le système d'équations paramétriques).

Or, $\vec{u}\cdot\vec{n}=2\times2-8\times(-1)-3\times2\neq0$

Donc, la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants .

Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et (ABC) vérifient le système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$ et l'équation cartésienne de (ABC) donnés dans l'énoncé. On obtient en reportant :

$2(-2+2t)-(2-8t)+2(1-3t)+2=0$

$-2+6t=0$

$t=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

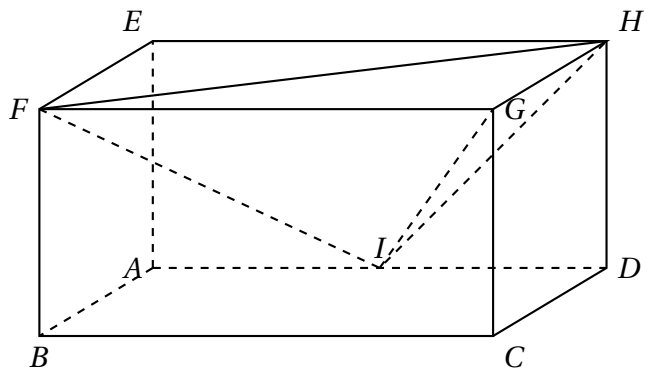
On obtient donc : $\begin{cases} x = -2+2t=-2+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{4}{3} \\ y = 2-8t=2-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2}{3} \\ z = 1-3t=1-\dfrac{3}{3}=0 \end{cases}$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc : $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (5 points) :

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

Soit I le milieu de [AD].



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points I, F, G, H.

$I\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad G\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad H\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

On prend comme base GFH, l'aire de ce triangle est $\frac{2\times 1}{2} = 1$

La hauteur entre la base et le point I est égale à la hauteur du parallélépipède, soit 1.

Ainsi, le volume du tétraèdre GFIH est : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times 1\times 1 = \frac{1}{3}$

3.a) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

On a : $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IH} = 0$.

Donc, ces deux vecteurs sont orthogonaux, et FIH est rectangle en I.

b) Calculer l'aire du triangle FIH.

Comme FIH est rectangle en I, son aire est égale à $\frac{1}{2}\text{IF}\times\text{IH}$.

$\text{IF} = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\text{IH} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Donc l'aire de FIH est : $\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$.

c) En exprimant $\mathscr{V}$ d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

Prenons comme base FIH. Si on appelle d la distance du point G au plan (FIH), le volume de GFIH est aussi :

$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A} \times d = \frac{\sqrt{6}}{6}d$

On a donc : $\boxed{d = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

4. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,-1)$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH). En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

$\overrightarrow{\text{IF}}$ et $\overrightarrow{\text{IH}}$ ne sont pas colinéaires. Pour montrer que $\vec{n}$ est normal à (FIH), il suffit donc de montrer qu'il est orthogonal à ces deux vecteurs.

On a : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{IF}} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0$, donc $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

(FIH) admet donc pour équation cartésienne : $2x + y - z + d = 0$ où d est un réel.
Comme $\text{I} \in$ (FIH), ses coordonnées vérifient l'équation précédente, donc : $1 + d = 0$, soit : $d = -1$.

(FIH) admet donc pour équation cartésienne : $\boxed{2x + y - z - 1 = 0}$.

b) Montrer que le projeté orthogonal de G sur le plan (FIH) a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

Soit T le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.
Il suffit de montrer deux choses :

- $\text{T} \in$ FIH,
- $\overrightarrow{\text{GT}}$ est normal à (FIH).

$2 \times \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3} - 1 = \frac{3}{3} - 1 = 0$ donc $\text{T} \in$ (FIH).

On a d'autre part : $\overrightarrow{\text{GT}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On voit que $\overrightarrow{\text{GT}} = -\frac{1}{3}\vec{n}$; donc ces deux vecteurs sont colinéaires. Ainsi, $\overrightarrow{\text{GT}}$ est bien normal à (FIH).

c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

La distance d est égale à GT par définition. On a vu que : $\overrightarrow{GT}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{GT=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

5.a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ? Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

On voit que $\overrightarrow{AG}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AG}$ n'est pas un vecteur normal à (FIH) ; donc la droite (AG) n'est pas perpendiculaire à (FIH).

La droite (AG) passe par A et admet $\overrightarrow{AG}$ comme vecteur directeur ; un système d'équations paramétriques de (AG) est donc : $\boxed{\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\end{cases}}$

b) Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

On reporte les expressions de x, y, z en fonction de t dans l'équation cartésienne du plan (FIH) :
$2t+2t-t-1=0$
$3t-1=0$
$t=\frac{1}{3}$

D'où : $\boxed{K\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$

Exercice 3 (10 points) :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(2x^2+x+1\right)$.

Partie A :

1. Déterminer la dérivée f' de f.

$$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\left(2x^2+x+1\right)+\mathrm{e}^{-x}(4x+1)=\mathrm{e}^{-x}(-2x^2-x-1+4x+1)=\mathrm{e}^{-x}(-2x^2+3x)=\mathrm{e}^{-x}x(-2x+3).$$

2. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.
Préciser une valeur approchée des extrema éventuels.

$f'(x)$ est du signe de $x(-2x+3)$ puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x.
Comme f est définie sur $[0;+\infty[$, x est positif. Donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+3$.
On obtient le tableau :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$7\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\left(2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 1\right) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) = 7\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \simeq 1{,}562.$$

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et compléter le tableau.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(2x^2+x+1\right) = \mathrm{e}^{-x}\times\left(-2x^2\right) + \mathrm{e}^{-x}\times x + \mathrm{e}^{-x}$.
On a, d'après le cours : $\lim\limits_{y\to-\infty} y^n\mathrm{e}^y = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Donc, posant $y=-x$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n = 0$.
Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^2 = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(2x^2+x+1\right) = 0$

4. Démontrer que $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x^2-7x+3\right)$.
Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f.

$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-2x^2+3x) + \mathrm{e}^{-x}(-4x+3) = \mathrm{e}^{-x}(2x^2-3x-4x+3) = \mathrm{e}^{-x}(2x^2-7x+3)$.

On étudie le signe de $2x^2-7x+3$.

$\Delta = 25$; les deux racines sont : $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{25}}{2\times2} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{25}}{2\times2} = 3$
Le trinôme est du signe de a, donc positif, sauf entre les racines.
On obtient :

x	0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est :
- convexe sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$
- concave sur $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$
- convexe sur $[3;+\infty[$.

Partie B :

Soit g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Démontrer que $g''(x) = f''(x)$ et en déduire les variations de g' sur $[0;3]$.

   $g(x) = f(x) - x$, donc $g'(x) = f'(x) - 1$ et donc $g''(x) = f''(x)$

   On obtient donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Démontrer que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;3]$.

   D'après le tableau, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le maximum de g' sur $[0;3]$.

   $g'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2}\right) - 1 \simeq -0{,}697$

   Le maximum est strictement négatif, donc $g' < 0$ sur $[0;3]$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, sur $[0;3]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près et vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

   - g est continue (car dérivable).
   - Elle est strictement décroissante car sa dérivée est strictement négative.
   - $g(0) = f(0) - 0 = 1$ et $g(3) = f(3) - 3 = \mathrm{e}^{-3}(-2 \times 3^2 + 3 + 1) - 3 \simeq -1{,}9$. Donc 0 appartient à l'intervalle $[g(0);g(3)]$.

   D'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;3]$.

   On trouve $\alpha \simeq 1{,}560695128464067$ soit $\alpha \simeq 1{,}561$.

   D'autre part, $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$, donc : $f(\alpha) = \alpha$.

4. Si la fonction f est concave sur l'intervalle I, on admet que pour tout $c \in I$, le taux de variation T_c entre c et x, défini sur $[a;b]$ privé de c par : $T_c(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est une fonction décroissante.

   Démontrer alors que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};3\right]$ privé de α, $\dfrac{f(3) - \alpha}{3 - \alpha} \leq \dfrac{f(x) - \alpha}{x - \alpha} \leq \dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right) - \alpha}{\frac{1}{2} - \alpha}$.

   En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};3\right]$ privé de α, $-0{,}4 \leq \dfrac{f(x) - \alpha}{x - \alpha} \leq 0{,}4$.

   On en déduit en passant aux valeurs absolues que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};3\right]$: $|f(x) - \alpha| \leq 0{,}4|x - \alpha|$.

La fonction f est concave sur $\left[\frac{1}{2};3\right]$ On applique la propriété citée en prenant $c=\alpha$.

$T_\alpha(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ est une fonction décroissante, donc $T_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\geq T_\alpha(x)\geq T_\alpha(3)$.

Cela signifie : $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{1}{2}-\alpha}\geq\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq\dfrac{f(3)-f(\alpha)}{3-\alpha}$.

Comme $f(\alpha)=\alpha$, on remplace et on écrit cet encadrement à l'envers :

$$\frac{f(3)-\alpha}{3-\alpha}\leq\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}\leq\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-\alpha}{\frac{1}{2}-\alpha}$$

Évaluons les deux termes extrêmes :

$\dfrac{f(3)-\alpha}{3-\alpha}\simeq-0{,}323$

$\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-\alpha}{\frac{1}{2}-\alpha}\simeq 0{,}328$

On en déduit que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};3\right]$ privé de α : $-0{,}4\leq\dfrac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}\leq 0{,}4$.

Autrement dit : $|f(x)-\alpha|\leq 0{,}4|x-\alpha|$ pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};3\right]$.

En effet, cette inégalité est vraie pour $x\neq\alpha$ d'après ce qui précède, et lorsque $x=\alpha$, elle se ramène à $0\leq 0$.

Partie C :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.
   Démontrer par récurrence que pour tout n, $1\leq u_n\leq 2$.

   Commençons par encadrer $f(x)$ lorsque $x\in[1;2]$.
   On a : $f(2)=\mathrm{e}^{-2}(2\times 2^2+2+1)=\mathrm{e}^{-2}\times 11\simeq 1{,}49$.
   Sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, f est croissante, donc $f(0)\leq f(x)\leq f\left(\frac{3}{2}\right)$ soit $1\leq f(x)\leq 1{,}562$.
   Sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$, f est décroissante, donc $f\left(\frac{3}{2}\right)\geq f(x)\geq f(2)$, soit $1{,}48\leq f(x)\leq 1{,}562$.
   Donc si $0\leq x\leq 2$, alors $1\leq f(x)\leq 2$

   À présent, démontrons le résultat de l'énoncé.
   La propriété est vraie pour $n=0$.
   Supposons que $1\leq u_n\leq 2$ pour un certain n.
   Alors d'après l'étude précédente, $1\leq f(u_n)\leq 2$, soit : $1\leq u_{n+1}\leq 2$.
   La propriété est donc vraie pour $n+1$.

   D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq 0{,}4^n |u_0 - \alpha|$ (utiliser la question B-4).

D'après la question B-4, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};3\right]$ privé de α : $|f(x) - \alpha| \leq 0{,}4|x - \alpha|$.
La propriété est vraie pour $n = 0$ car $0{,}4^0 = 1$.
Supposons que la propriété soit vraie pour n : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}4^n |u_0 - \alpha|$.
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}4|u_n - \alpha|$.
Alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}4|u_n - \alpha| \leq 0{,}4 \times 0{,}4^n |u_0 - \alpha|$ (inégalité de même sens car $0{,}4 > 0$).
Ainsi : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}4^{n+1} |u_0 - \alpha|$; la propriété est donc vraie pour $n+1$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire, par comparaison, que (u_n) a pour limite α.

D'après la question précédente : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}4^n |u_0 - \alpha|$.
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}4^n = 0$ puisque $0{,}4 < 1$.
Posons pour tout $n \int \mathbb{N}$: $v_n = 0$ et $w_n = 0{,}4^n |u_0 - \alpha|$.
Alors, pour tout n, $|u_n - \alpha|$ est compris entre v_n et w_n ; les suites (v_n) et (w_n) ont la même limite 0.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$ et donc : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.

Remarque : On ne peut pas appliquer ici le théorème de convergence monotone, car la suite (u_n) n'est pas monotone, contrairement aux apparences.