Corrigé du devoir surveillé n° 7

Exercice 1 :

1. Un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
   Par conséquent, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
2. Cherchons d'abord les coordonnées d'un point de (d).
   Un point $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées vérifient à la fois l'équation de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$.
   On cherche donc une solution du système :
   $\begin{cases} 6x+4y-3z+2=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$
   Ce système a une infinité de solution. Choisissons l'une d'entre elles en posant par exemple : $z=4$.
   On obtient le système :
   $\begin{cases} 6x+4y-10=0 \\ x+y=0 \end{cases}$
   De la deuxième ligne, on tire $y=-x$; on reporte dans la première ligne :
   $6x-4x-10=0$ soit $x=5$; on en déduit : $y=-5$.
   On obtient donc une solution : $A\begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix}$

   Cherchons à présent les coordonnées d'un vecteur directeur de (d).
   Un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) si c'est un vecteur (non nul) appartenant à la fois à la direction de $\mathscr{P}_1$ et à celle de $\mathscr{P}_2$. Autrement dit, il est orthogonal à la fois à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$.
   Ses coordonnées vérifient donc le système :
   $\begin{cases} 6x+4y-3z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$
   Si on calcule : ligne 1 + 3 × ligne 2, on obtient : $9x+7y=0$.
   Une solution simple de cette équation est : $x=7$ et $y=-9$. Reportant dans chacune des lignes, on trouve dans les deux cas : $z=2$.
   On obtient donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-9\\2\end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Par définition, $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan P. Posons : $H\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x+11\\y-22\\z-4\end{pmatrix}$ et on sait que $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$, vecteur normal à P.

Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$, ce qui implique : $\begin{cases}x=-t-11\\y=3t+22\\z=4\end{cases}$

Comme $H\in P$, on obtient en remplaçant dans l'équation cartésienne de (P) :

$-(-t-11)+3(3t+22)+3=0$, soit : $10t+80=0$ et donc : $t=-8$.

Par conséquent : $\begin{cases}x=-(-8)-11=-3\\y=3\times-8+22=-2\\z=4\end{cases}$

On obtient : $H\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de H vérifient évidemment le système d'équations paramétrique de d. Donc :

$\begin{cases}x=2t+8\\y=-3t-4\\z=3t+10\end{cases}$

D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x-22\\y-14\\z-4\end{pmatrix}$ est orthogonal à (d), donc orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$, qui est un vecteur directeur de (d).

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}$ est donc nul.

On obtient : $2(x-22)-3(y-14)+3(z-4)=0$, soit : $2x-3y+3z-14=0$.

On remplace x, y et z par leur expression en fonction de t :

$2(2t+8)-3(-3t-4)+3(3t+10)-14=0$

$22t+44=0$

$t=-2$

On en déduit : $\begin{cases}x=2\times(-2)+8=4\\y=-3\times(-2)-4=2\\z=3\times(-2)+10=4\end{cases}$

On obtient : $H\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$

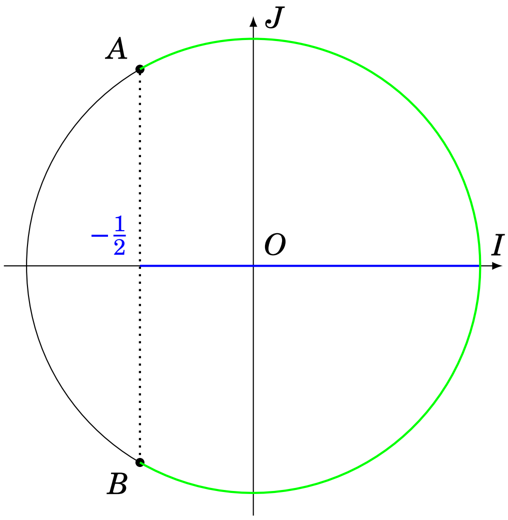
Exercice 4 :

1. $f'(t)=1+2\cos(2t)$, par application de la formule de première.
2. On résout par exemple : $f'(t)\geq 0$.

   $1+2\cos(2t)\geq 0$

   $\cos(2t)\geq -\dfrac{1}{2}$

Si on pose $x = 2t$, on voit que x varie dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$ et son image par enroulement appartient à la zone verte ci-dessous :



Quand x varie de 0 à $\dfrac{2\pi}{3}$, son image décrit l'arc $\widehat{IA}$ dans le sens direct, x est donc solution.

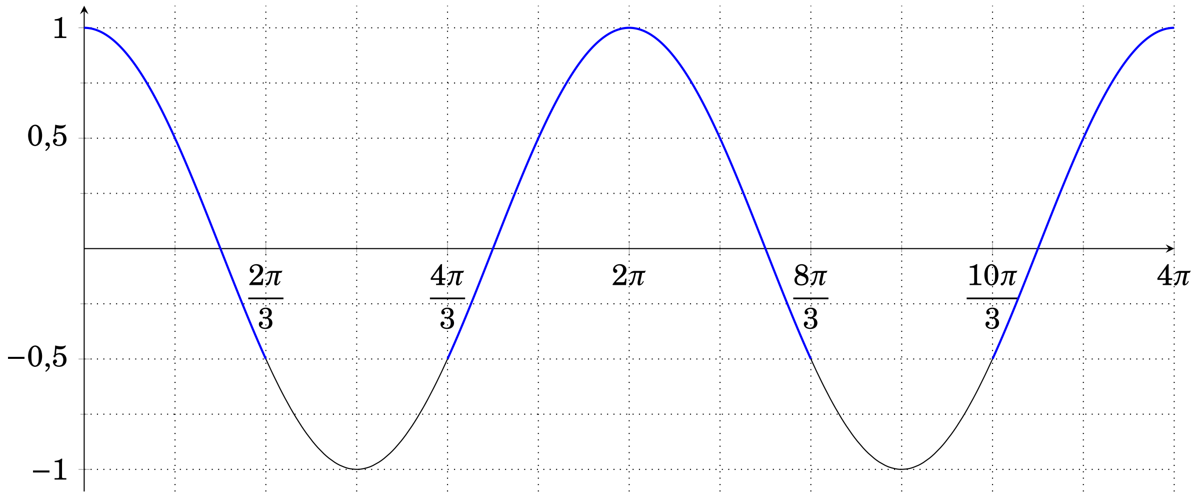
Quand x varie de $\dfrac{2\pi}{3}$ à $\dfrac{4\pi}{3}$, son image décrit l'arc $\widehat{AB}$ dans le sens direct, x n'est pas solution.

Quand x varie de $\dfrac{4\pi}{3}$ à $\dfrac{8\pi}{3}$, son image décrit l'arc $\widehat{BA}$ dans le sens direct, x est solution.

Quand x varie de $\dfrac{8\pi}{3}$ à $\dfrac{10\pi}{3}$, son image décrit l'arc $\widehat{AB}$ dans le sens direct, x n'est pas solution.

Quand x varie de $\dfrac{10\pi}{3}$ à $\dfrac{12\pi}{3} = 4\pi$, son image décrit l'arc $\widehat{BI}$ dans le sens direct, x est solution.

Autre méthode : On peut utiliser la courbe de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0\,;4\pi]$.



Ainsi, $f'(t) \geq 0$ quand $2t = x$ appartient à l'ensemble $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}\,;\dfrac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{10\pi}{3}\,;4\pi\right]$.

Autrement dit, $f'(t) \geq 0$ quand t appartient à l'ensemble $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$.

3. On obtient le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{5\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	2π

$f(0) = 0 + \sin(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}913$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}228$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 5{,}055$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 4{,}370$

$f(2\pi) = 2\pi + \sin(4\pi) = 4\pi \simeq 6{,}283$

On vérifie que ces valeurs sont compatibles avec le sens des flèches.

4. Sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;2\pi\right]$, le tableau montre que le minimum de f est $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}228$. Donc f ne prend pas la valeur 1, l'équation $f(t) = 1$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

   Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante d'après le tableau. De plus, 1 est compris entre $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq 1{,}228$.
   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = 1$ a donc exactement une solution sur cet intervalle.

   Par conséquent, l'équation $f(x) = 1$ a exactement une solution sur $[0\,;2\pi]$