Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 :

1. Classiquement, quand l'énoncé dit : « on choisit au hasard », il faut comprendre : « on choisit au hasard avec équiprobabilité ».
   Toutes les issues étant équiprobables, la probabilité d'un événement est alors simplement la proportion d'issues composant cet événement.
   On trouve donc ici : 5% (proportion d'animaux infectés).

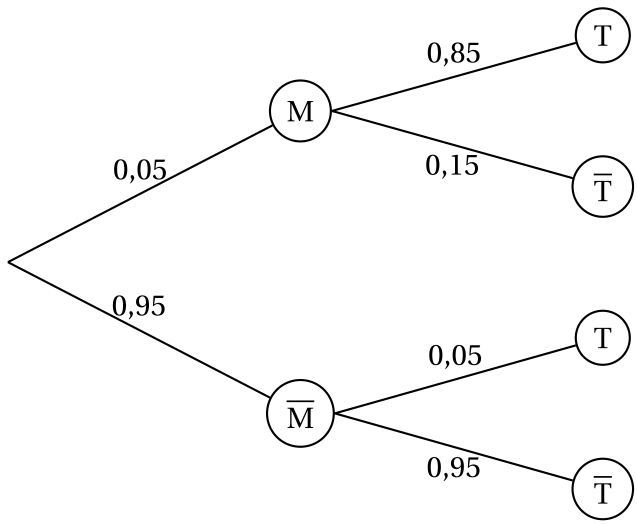
2. Le choix d'un animal est une expérience aléatoire à deux issues : l'animal est malade ou pas. Les savants appellent ça une épreuve de Bernoulli.
   On reproduit cette expérience 10 fois, avec indépendance (car sinon, il n'y aura pas de loi binomiale). On obtient un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire X compte le nombre d'animaux infectés parmi les 10 : X suit donc une loi binomiale de paramètres :
   $n = 10$ puisqu'on reproduit 10 fois l'expérience à 2 issues,
   et $p = 0{,}05$ puisque la probabilité qu'un animal pris au hasard soit malade est 5%).

3. D'après le cours : $P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0{,}05^3 \times (1-0{,}05)^{10-3} = 120 \times 0{,}05^3 \times 0{,}95^7$
   D'où : $P(X=3) \simeq 0{,}0105$
   La probabilité que trois animaux exactement parmi les dix soient infectés est de 0,0105 environ.

4. On cherche $P(X \geq 1)$; en passant par l'événement contraire, on trouve : $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}95^{1}0$
   Soit : $P(X \geq 1) \simeq 0{,}4013$

5. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
   D'après le cours : $E(X) = np = 10 \times 0{,}05 = 0{,}5$
   Le nombre moyen d'animaux infectés sur un échantillon de 10 est de 0,5.

6.a)



b) D'après le principe des probabilités totales : $P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T})$

c'est à dire : $P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{M}) \times P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}}) \times P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})$

D'après l'énoncé, on obtient : $P(\mathrm{T}) = 0{,}05 \times 0{,}85 + 0{,}95 \times 0{,}05 = 0{,}09$

c) On cherche $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}85}{0{,}09}$

Ainsi : $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \simeq 0{,}4722$

Exercice 2 :

1. Le choix d'un moteur au hasard est une épreuve de Bernoulli; les deux issues étant : le moteur tombe en panne la première année ou non.
   En achetant 200 moteurs, l'entreprise reproduit cette expérience 200 fois de façon indépendante (puisque cet achat peut être assimilé à un tirage avec remise).
   La variable aléatoire X comptant le nombre de moteurs qui tombent en panne la première année suit donc une loi binomiale de paramètres : $n = 200$ et $p = 0{,}12$.

   Ceci étant posé, on voit que la probabilité cherchée est $P(X = 20)$.

   On trouve à la calculatrice : $P(X = 20) \simeq 0{,}0628$

2. On cherche ici : $P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24)$ (en passant à l'événement contraire).

   On trouve à la calculatrice : $P(X \geq 25) \simeq 0{,}5541$

3. La probabilité cherchée est $P(20 \leq X \leq 30)$ qui est égale à $P(X \leq 30) - P(X \leq 19)$

   On trouve : $P(X \leq 30) \simeq 0{,}917906$ et $P(X \leq 19) \simeq 0{,}163781$.

   Par conséquent : $P(20 \leq X \leq 30) \simeq 0{,}7541$

4. Qui dit moyenne dit espérance.
   On cherche donc $E(X) = 200 \times 0{,}12 = 24$
   Le nombre moyen de moteurs parmi 200 pris au hasard qui tombent en panne la première année d'utilisation est de 24.

5. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de moteurs tombant en panne la première année parmi les n achetés par l'entreprise. On trouve comme à la première question que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}12$.

   On veut que la probabilité qu'aucun moteur ne tombe en panne soit supérieure ou égale à 1%.
   Cela revient à résoudre l'inéquation : $P(Y = 0) \geq 0{,}01$.

   $$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}12^0 \times (1 - 0{,}12)^n = 0{,}88^n$$

   On résout donc :
   $0{,}88^n \geq 0{,}01$

   $\ln(0{,}88^n) \geq \ln(0{,}01)$

   $n \ln(0{,}88) \geq \ln(0{,}01)$

   $n \leq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}88)}$

   $n \leq 36{,}02\ldots$

   On voit donc que l'entreprise peut choisir jusqu'à 36 moteurs si elle veut que la condition de l'énoncé soit remplie.