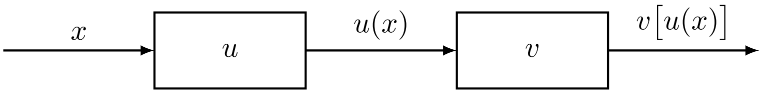
Compléments sur la dérivation

1 Composée de deux fonctions

Soient u et v, deux fonctions, $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$ leurs ensembles de définition. Si $x \in \mathcal{D}_u$ et $u(x) \in \mathcal{D}_v$, alors on peut définir $v[u(x)]$.



Définition 1
La fonction qui à tout x associe $v\big[u(x)\big]$ est la **composée** de u et v, notée $v \circ u$.
On a donc pour tout x : $(v \circ u)(x) = v\big[u(x)\big]$.

L'ensemble de définition de $v \circ u$ est donc l'ensemble des x tels que $x \in \mathcal{D}_u$ et $u(x) \in \mathcal{D}_v$.

Attention à l'ordre : pour calculer l'image d'un nombre par $v \circ u$, on applique d'abord u, puis v.

Propriété 1
Si $v \circ u$ est dérivable en x, on a : $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$. Autrement dit : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Démonstration :
Si u est dérivable en a, alors $u'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$.

On en déduit : $u(a+h) = u(a) + h \times \varphi(h) \quad$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = u'(a) \qquad (1)$

Si v est dérivable en b, alors $v'(b) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{v(b+k) - v(b)}{k}$.

On en déduit : $v(b+k) = v(b) + k \times \psi(k) \quad$ avec $\lim\limits_{k \to 0} \psi(k) = v'(b) \qquad (2)$

On peut donc écrire d'après la relation (1) :

$(v \circ u)(a+h) = v[u(a+h)] = v[u(a) + h \times \varphi(h)]$

On applique ensuite la relation (2) avec $b = u(a)$ et $k = h \times \varphi(h)$.

On obtient : $v[u(a+h)] = v[u(a)] + h\varphi(h) \times \psi[h\varphi(h)]$

Par conséquent : $\dfrac{v[u(a+h)] - v[u(a)]}{h} = \varphi(h)\psi[h\varphi(h)] \qquad (3)$

À présent, on passe à la limite.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0} h\varphi(h) = 0 \\ \lim\limits_{k \to 0} \psi(k) = v'(b) \end{array}\right\} \text{donc (par composition de limites) : } \lim\limits_{h \to 0} \psi[h\varphi(h)] = v'(b) = v'[u(a)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = u'(a) \\ \lim\limits_{h \to 0} \psi[h\varphi(h)] = v'[u(a)] \end{array}\right\} \text{donc (par produit de limites) : } \lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)\psi[h\varphi(h)] = u'(a)v'[u(a)]$$

Or, cette limite est aussi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v[u(a+h)] - v[u(a)]}{h}$, d'après la relation (3).

Par conséquent : $(v \circ u)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v[u(a+h)] - v[u(a)]}{h} = u'(a)v'[u(a)]$ ■

Exemple : Posons pour tout $x > 0$: $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2$.

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x$. Donc $v'[u(x)] = 2u(x) = 2\sqrt{x}$ et $v'[u(x)] \times u'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 1$

C'est normal, puisque $v[u(x)] = [u(x)]^2 = \sqrt{x}^2 = x$.

Cas particuliers importants :

- Considérons le cas où u est une fonction affine : $u(x) = ax + b$.
  Alors $u'(x) = a$, donc $v'[u(x)] \times u'(x) = v'(ax + b) \times a$.
  On retrouve la propriété de première : si $f(x) = v(ax + b)$, alors $f'(x) = a \times v'(ax + b)$.
- Si $v(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
  Par conséquent, si $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, alors $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $v(x) = x^n$, $v'(x) = nx^{n-1}$.
  Par conséquent, si $f(x) = [u(x)]^n$, alors $f'(x) = u'(x)n[u(x)]^{n-1}$.
- Si $v(x) = \dfrac{1}{x}$, $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
  Par conséquent, si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, alors $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.
- Si $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Par conséquent, si $f(x) = \sqrt{u(x)}$, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

2 Dérivée seconde

Définition 2
Soit f une fonction et f' sa dérivée. Si le nombre dérivé de f' en a existe, on dit que f est deux fois dérivable en a.
On note $f''(a)$ le nombre dérivé de f' en a, et la fonction qui à x fait correspondre $f''(x)$ s'appelle la **dérivée seconde** de f. C'est la dérivée de la dérivée.

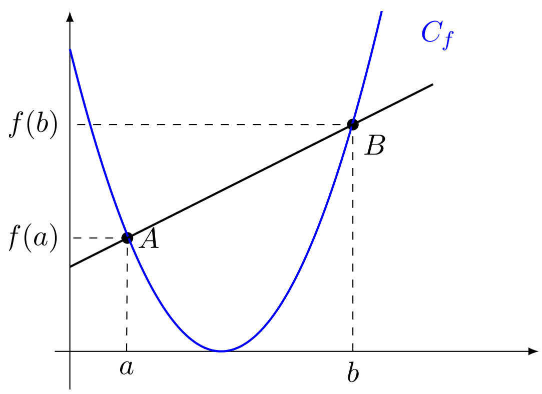
Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

On peut poursuivre le processus et calculer la dérivée troisième, quatrième, etc. de f. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

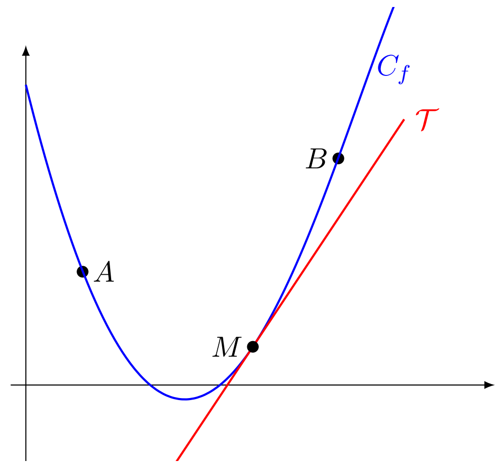
3 Fonctions convexes

Définition 3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b, deux nombres appartenant à I. Soient $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ les points correspondants sur la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f.
On dit que f est **convexe** sur I si quels que soient a et b dans I, la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ placée entre A et B est **au-dessous** de la sécante (AB).

Il faut comprendre au sens large : au-dessous ou sur la sécante (AB).



Propriété 2
Une fonction dérivable f est convexe sur I si et seulement la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de ses tangentes.



$\mathcal{C}f$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ au point M.

Propriété 3
Soit f une fonction dérivable sur I ; f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.

Si f' est dérivable, on sait qu'elle est croissante si et seulement si sa dérivée est positive. Autrement dit :

Propriété 4
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.

Exemples : La fonction carré, la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$. En effet, leur dérivée seconde est positive.

La fonction inverse, la fonction cube sont convexes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On va démontrer une partie de la propriété précédente : Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration :
Supposons f'' positive. Alors f' est croissante, puisque sa dérivée est positive.

Soit $a \in I$, $A(a\,;f(a))$ un point de $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{T}$, la tangente en A.

Pour montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$, il suffit de montrer que pour tout $x \in I$, le point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus du point N de la tangente $\mathcal{T}$ de même abscisse x.

M a pour ordonnée $f(x)$ et N a pour ordonnée $f'(a)(x-a)+f(a)$ (d'après l'équation d'une tangente). On veut donc montrer que $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$, autrement dit : $f(x)-f'(a)(x-a) \geq f(a)$.

On étudie donc la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a)$.

On a : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. On sait que f' est croissante, donc g' aussi (on passe de l'une à l'autre en soustrayant $f'(a)$, qui est une constante). Par ailleurs, on voit que $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.

Donc $g'(x)$ est négatif lorsque $x \leq a$ et positif lorsque $x \geq a$. On obtient, pour $x \in I$:

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Le minimum est : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) = f(a)$

D'après le tableau, $g(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$, donc $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$ et donc M est au-dessus de N.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$. ■

On démontre plus loin, en annexe, que si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, alors f est convexe.

La notion symétrique de « convexe » est « concave ».

Définition 4
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b, deux nombres appartenant à I. Soient $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ les points correspondants sur la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f.
On dit que f est **concave** sur I si quels que soient a et b dans I, la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ placée entre A et B est **au-dessus** de la sécante (AB).

Remarque : L'opposée d'une fonction convexe est concave. On peut donc adapter les propriétés précédentes. En particulier :

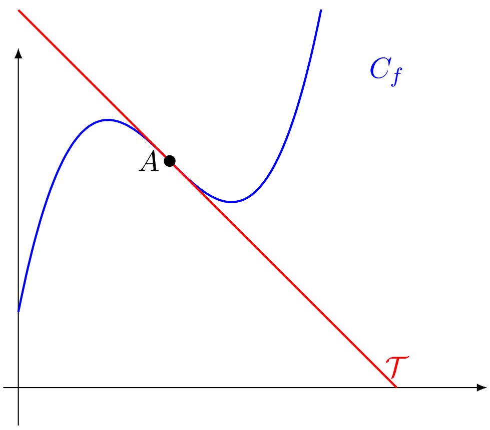
Propriété 5 (admise)
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; f est concave si et seulement si f'' est négative sur I.

Exemple : La fonction racine carrée est concave. La fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}^{-*}$.

4 Point d'inflexion

Définition 5
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A si la fonction change de convexité en ce point : de concave elle devient convexe ou inversement.

Remarque : En ce point, la tangente traverse la courbe



Des propriétés précédentes, on déduit le résultat suivant :

Propriété 6
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; si f'' s'annule en changeant de signe en $x = a$, alors f admet un point d'inflexion $A(a\,;f(a))$.

Bien sûr, la courbe d'une fonction peut avoir un nombre arbitraire de points d'inflexion (voire une infinité).

Annexe :

On va démontrer la propriété : si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, alors f est convexe.

Démonstration :
Pour alléger les notations, quels que soient les points U et V, notons $m_{(UV)}$ le coefficient directeur de la droite (UV).

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m_{(AB)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (c'est aussi le taux de variation de f entre a et b).
Alors (AB) a pour équation $y = m_{(AB)}(x-a)+f(a)$ et aussi $y = m_{(AB)}(x-b)+f(b)$.

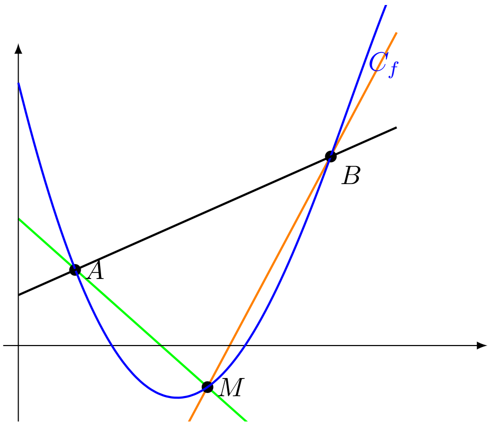
Soit $x \in [a\,;b]$. Si $M(x\,;f(x))$ est au-dessous de, ou sur (AB), alors :

- $f(x) \leq m_{(AB)}(x-a)+f(a)$, ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq m_{(AB)}$, c'est à dire $m_{(AM)} \leq m_{AB}$.
- $f(x) \leq m_{(AB)}(x-b)+f(b)$, ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq m$ (un $\geq$ car $x-b$ est négatif), c'est à dire $m_{(MB)} \geq m_{(AB)}$.

On obtient donc : $m_{(AM)} \leq m_{(AB)} \leq m_{(MB)}$ (1)

De la même façon, si M est au-dessus de (AB), on trouve : $m_{(AM)} > m_{(AB)} > m_{(MB)}$ (2)

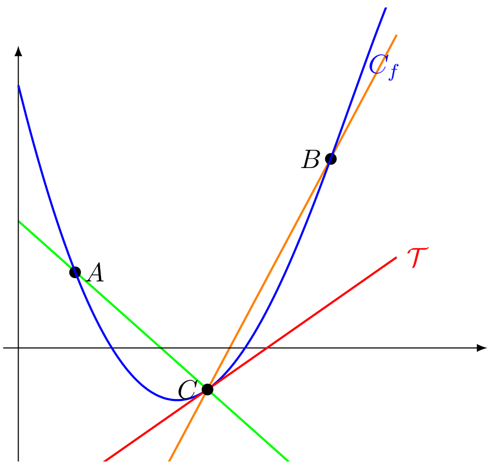
D'après la relation (1), si f est convexe alors pour tout $x \in [a\,;b]$, $m_{(AM)} \leq m_{(AB)} \leq m_{(MB)}$. Autrement dit, si l'abscisse de M est comprise entre l'abscisse de A et celle de B, alors le coefficient directeur de (AB) est compris entre le coefficient directeur de (AM) et le coefficient directeur de (MB).



Réciproquement, si, pour tout point M entre A et B, le coefficient directeur de (AM) est inférieur ou égal au coefficient directeur de (MB), alors f est convexe sur $[a\,;b]$. (3)

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un point M situé au-dessus de (AB), et d'après la relation (2), on trouverait $m_{(AM)} > m_{(MB)}$, en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons à présent que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.



Soient A, B, C trois points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a, b, c avec $a < c < b$. Il faut démontrer que le point C est au-dessous de la sécante (AB).

La tangente $\mathcal{T}$ en C à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f'(c)(x-c) + f(c)$.

Comme A est au-dessus de $\mathcal{T}$, $y_A = f(a) \geq f'(c)(a-c) + f(c)$. On en déduit : $\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq f'(c)$ (changement de sens car $a-c$ est négatif).

De même, comme B est au-dessus de $\mathcal{T}$, $y_B = f(b) \geq f'(c)(b-c) + f(c)$. On en déduit : $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} \geq f'(c)$.

Ainsi : $\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq f'(c) \leq \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$, donc $\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$, c'est à dire $m_{(AC)} \leq m_{(CB)}$.

Comme c'est vrai pour n'importe quel point C entre A et B, alors d'après le point (3), ceci implique que f est convexe sur $[a\,;b]$, et comme c'est vrai quels que soient a et b, alors f est convexe sur I. ∎

On peut aussi démontrer la réciproque : si f est convexe sur I, alors la partie correspondante de $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration :
Soient A, B, C, M trois points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a, b, c, x appartenant à I, où c et x sont compris entre a et b. Démontrons que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$, la tangente en C.

1$^{\text{er}}$ cas : M est entre A et C. Alors C est entre M et B.

D'après le point (1), on a : $m_{(AM)} \leq m_{(AC)} \leq m_{(MC)}$ et $m_{(MC)} \leq m_{(MB)} \leq m_{(CB)}$.

On en déduit : $m_{(AC)} \leq m_{(MC)} \leq m_{(CB)}$.

2$^{\text{e}}$ cas : M est entre C et B. Alors C est entre A et M.

D'après le point (1), on a cette fois : $m_{(AC)} \leq m_{(AM)} \leq m_{(MC)}$ et $m_{(MC)} \leq m_{(CB)} \leq m_{(MB)}$.

On en déduit : $m_{(AC)} \leq m_{(MC)} \leq m_{(CB)}$.

Dans tous les cas, on a ainsi : $m_{(AC)} \leq m_{(MC)} \leq m_{(CB)}$.

Lorsque M tend vers C, le coefficient directeur de (MC) tend vers $f'(c)$ et donc d'après la propriété 6 du cours sur les limites : $m_{(AC)} \leq f'(c) \leq m_{(CB)}$.

- $m_{(AC)} \leq f'(c)$ s'écrit : $\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq f'(c)$, qui implique : $f(a)-f(c) \geq f'(c)(a-c)$ (car $a-c$ est négatif).
  Par conséquent : $f(a) \geq f'(c)(a-c) + f(c)$.
  Or, $f'(c)(a-c) + f(c)$ est l'ordonnée du point A' de la tangente $\mathcal{T}$ qui a même abscisse que A. On a $y_A \geq y_{A'}$ donc A est au-dessus de $\mathcal{T}$.
- $f'(c) \leq m_{(CB)}$ s'écrit : $f'(c) \leq \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$, qui implique : $f'(c)(b-c) \leq f(b)-f(c)$.
  Par conséquent : $f(b) \geq f'(c)(b-c) + f(c)$.
  On raisonne comme précédemment : $f'(c)(b-c)+f(c)$ est l'ordonnée du point B' de la tangente $\mathcal{T}$ qui a même abscisse que B. On a $y_B \geq y_{B'}$ donc B est au-dessus de $\mathcal{T}$.

Comme c'est vrai quel que soit le point C, on en déduit : la partie de courbe entre A et B est située au-dessus de ses tangentes. Et comme ceci est vrai quelle que soit la position de A et B, on voit que c'est vrai aussi pour toute la partie de la courbe correspondant à I. ∎