Combinatoire et dénombrement

1 Un peu d'histoire

Des propriétés arithmétiques du triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIXe siècle (Lucas, Delannoy, Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.

2 Ensembles - Rappels et vocabulaire

On part d'une idée empirique d'ensemble. Un ensemble contient des éléments, qui peuvent être des nombres, des points, des vecteurs, etc. On écrit $x \in E$ pour signifier : l'élément x **appartient** à l'ensemble E.

Une **partie** (ou **sous-ensemble**) de E est un ensemble formé par certains des éléments de E (éventuellement tous, ou aucun.) On écrit $S \subset E$ pour signifier : l'ensemble S est une partie de l'ensemble E. On dit aussi que S est **inclus** dans E.

Par exemple : la droite (AB) est un ensemble de points ; le segment $[AB]$ est une partie de (AB).

L'**ensemble vide**, noté $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Par convention, $\varnothing$ est inclus dans n'importe quel ensemble. Ainsi, tout ensemble E a au moins deux sous-ensembles : $\varnothing$ et E lui-même.

L'**intersection** de deux ensembles E et F, notée $E \cap F$, est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à la fois à E et à F. Ainsi, $E \cap F$ est inclus dans E, et aussi inclus dans F.

Si $E \cap F = \varnothing$ (les deux ensembles n'ont aucun élément en commun), on dit que E et F sont **disjoints**.

La **réunion** de E et F, notée $E \cup F$, est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent au moins à un des ensembles E et F (l'un, l'autre ou les deux). Ainsi, E est inclus dans $E \cup F$, et F aussi.

Le **complémentaire** d'un sous-ensemble S de E, noté $E \setminus S$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à S. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on emploie aussi la notation $\overline{S}$ (par ex. en probabilités).

Enfin, le **produit cartésien** de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

On définit de même $E \times F \times G$, ensemble des triplets $(x\,;y\,;z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$, et plus généralement $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, ensemble des **$n$-uplets** (ou **$n$-listes**) $(x_1\,;x_2\,;...\,;x_n)$ où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... et $x_n \in E_n$.

3 Principe additif, principe multiplicatif

Les ensembles considérés à partir de maintenant sont **finis**, et **non vides**.

Définition 1
Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E, noté $\text{Card}(E)$, est le nombre d'éléments de E.

Propriété 1
Si E et F sont deux ensembles finis **disjoints**, alors le nombre d'élément de leur réunion est la somme du nombre d'éléments de E et du nombre d'éléments de F. On écrit :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

Plus généralement, si E_1, E_2, ..., E_n sont des ensembles finis **deux à deux disjoints**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + ... + \text{Card}(E_n)$$

Cette propriété, assez évidente, est admise. En réalité, c'est presque la définition d'une somme.

Corollaire : Si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles finis deux à deux disjoints contenant chacun le même nombre p d'éléments, alors leur réunion contient $n \times p$ éléments.

Propriété 2
Si E et F sont deux ensembles finis, alors le nombre d'élément du produit cartésien $E \times F$ est le produit du nombre d'éléments de E par le nombre d'éléments de F. On écrit :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Plus généralement, si E_1, E_2, ..., E_n sont des ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times ... \times \text{Card}(E_n)$$

Cette propriété est admise. Le principe de la preuve est le suivant : posons $n = \text{Card}(E)$, $p = \text{Card}(F)$, et considérons un couple $(x\,;y)$ de $E \times F$. Il y a n choix possibles pour x et, pour chacun, p choix possibles pour y, d'où $n \times p$ choix possibles pour $(x\,;y)$.

Corollaire : Si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles finis contenant chacun le même nombre p d'éléments, alors leur produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ contient p^n éléments.

Ce résultat s'applique en particulier si $E_1 = E_2 = ... = E_n$. On a ainsi :

Propriété 3
Si E est un ensemble fini contenant p éléments, alors le nombre de n-uplets d'élément de E est p^n.

Notons : $E^n = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n \text{ « facteurs »}}$; alors : $\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$.

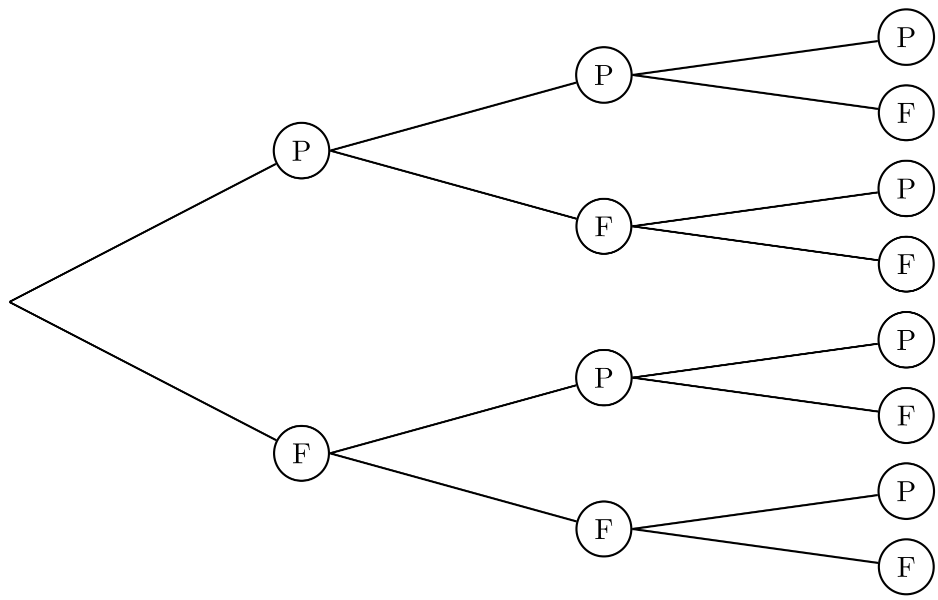
Exemples : Avec les 26 lettres de l'alphabet, on peut former $26^3 = 17576$ mots de 3 lettres.

Avec les chiffres de 0 à 9, on peut former $10^4 = 10\,000$ nombres de 4 chiffres, de 0000 à 9999.

Avec les 2 lettres « S » et « E », on peut former 2^n mots de n lettres. On reverra cet exemple en probabilités.

C'est aussi le nombre de branches terminales, ou de parcours possibles, sur un arbre binaire à n niveaux de branches (binaire signifie que chaque branche d'un niveau donne naissance à deux branches du niveau suivant).

Exemple avec un jeu de pile ou face (3 lancers, 8 parcours possibles) :



4 Applications

4.1 Nombre de fonctions entre deux ensembles finis

Soit E un ensemble à n éléments, notés x_1, x_2, ..., x_n et F un ensemble à p éléments. Soit f une fonction de E dans F. Le n-uplet $(f(x_1)\,;f(x_2)\,;\ldots;f(x_n))$ est constitué de n éléments de F, et il définit précisément la fonction f. D'après la propriété 3, il y a exactement p^n n-uplets de ce type. On en déduit :

Propriété 4
Le nombre de fonctions d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments est p^n.

Intuitivement, on a p choix pour l'image de x_1, p choix pour l'image de x_2, etc.

On peut aussi en donner une illustration graphique sous forme d'arbre : chaque branche du premier niveau donne naissance à p branche du deuxième niveau ; chacune des branches du deuxième niveau donne naissance à p branche du troisième niveau et ainsi de suite. Si le nombre de niveaux est n, on constate qu'il y a p^n branches terminales, c'est à dire aussi p^n parcours possibles (de gauche à droite) sur l'arbre.

4.2 Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini à n éléments. Numérotons ses éléments de 1 à n. Soit S une partie de E.

On forme alors le n-uplet de chiffres binaires $(c_1\,;c_2\,;\ldots;c_n)$ en convenant de poser $c_k = 1$ si le k-ième élément de E appartient à S et $c_k = 0$ dans le cas contraire.

Avec ce codage, on voit qu'à toute partie de E correspond exactement un nombre binaire de n chiffres. D'après la propriété 3, il y a exactement 2^n nombres de ce type. On en déduit :

Propriété 5
Soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est 2^n.

Exemple : Soit $E = \{a\,;b\,;c\}$. Avec le codage précédent :

$(0\,;0\,;0)$ correspond à $\varnothing$, $(1\,;0\,;0)$ correspond à $\{a\}$, $(0\,;1\,;0)$ correspond à $\{b\}$, $(1\,;1\,;0)$ correspond à $\{a\,;b\}$, etc. Enfin, $(1\,;1\,;1)$ correspond à E tout entier.

Remarque : Le codage précédent définit une fonction de E dans $\{0\,;1\}$. Le nombre de parties de E est donc aussi le nombre de fonctions de E dans $\{0\,;1\}$.

5 Arrangements et permutations des éléments d'un ensemble

5.1 Arrangements

Parmi les k-uplets d'éléments d'un ensemble, certains méritent une attention particulière.

Définition 2
Soit E un ensemble fini.
Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments de E **tous différents**.

On parle aussi, pour abréger, d'un k-arrangement de E.

Remarque évidente : Posons $n = \text{Card}(E)$. Le nombre de k-arrangement de E est 0 si $k > n$. On ne peut pas trouver plus d'éléments différents qu'il n'y a d'éléments au total dans E.

Propriété 6
Soit E un ensemble à n éléments.
Pour tout entier $k \leq n$, le nombre de k-arrangements de E est : $n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+2)\times(n-k+1)$.

Propriété admise. Le principe heuristique est toujours : on a n choix possible pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième élément, et ainsi de suite jusqu'à $n-k+1$ pour le k-ième élément.

Remarque : Ce produit contient k facteurs.

Exemple : Il y a $4 \times 3 = 12$ couples d'éléments distincts formés à partir des nombres 1, 2, 3, 4 :

$(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(3;1)$, $(3;2)$, $(3;4)$, $(4;1)$, $(4;2)$, $(4;3)$.

5.2 Permutations

> **Définition 3**
> Soit E un ensemble à n éléments. Une **permutation** de E est un arrangement de n éléments de E.

Autrement dit, c'est une liste comprenant une et une seule fois chacun des éléments de E.

D'après la propriété 6, le nombre de permutations est $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Exemple : Il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ façons de ranger les nombres 1, 2, 3, 4 :

$(1;2;3;4)$, $(1;2;4;3)$, $(1;3;2;4)$, $(1;3;4;2)$, $(1;4;2;3)$, $(1;4;3;2)$,

$(2;1;3;4)$, $(2;1;4;3)$, $(2;3;1;4)$, $(2;3;4;1)$, $(2;4;1;3)$,$(2;4;3;1)$,

$(3;1;2;4)$, $(3;1;4;2)$, $(3;2;1;4)$, $(3;2;4;1)$, $(3;4;1;2)$, $(3;4;2;1)$,

$(4;1;2;3)$, $(4;1;3;2)$, $(4;2;1;3)$, $(4;2;3;1)$, $(4;3;1;2)$, $(4;3;2;1)$.

5.3 La fonction factorielle

> **Définition 4**
> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n le nombre : $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.
> Par convention, $0! = 1$.

On peut donc écrire :

- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est : $n!$
- Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments est : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

En effet : $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) \times (n-k) \times ... \times 1}{(n-k) \times ... \times 1} = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$.

6 Combinaisons des éléments d'un ensemble

6.1 Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments, et k un entier naturel quelconque. On se pose à présent la question suivante : parmi les parties de E, combien y en a-t-il qui ont exactement k éléments ?

> **Définition 5**
> Une **combinaison** de k éléments d'un ensemble E à n éléments est une partie de l'ensemble E contenant exactement k éléments.
> Le nombre de ces parties à k éléments se note $\dbinom{n}{k}$ et se lit « nombre de combinaisons de k parmi n », ou plus simplement : « k parmi n ». Les $\dbinom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Le terme « combinaison » s'explique par des raisons historiques ; il a donné le mot « combinatoire ». Quant au nom « coefficient binomial », il provient du terme « binôme », expression de la forme $(a+b)^n$.

Remarque : $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de listes **ordonnées** de k nombres entiers choisis entre 1 et n.

Exemple : Considérons l'ensemble des nombres de 1 à 49. Le nombre de parties à 6 éléments est $\binom{49}{6}$. C'est le nombre de tirages possibles (l'ordre n'étant pas pris en compte) au loto, ancienne version.

6.2 Premières propriétés

Procédons à quelques remarques simples.

- Une partie de E ne peut pas avoir plus d'éléments que E lui-même. Autrement dit, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. On suppose donc à présent que k est compris entre 0 et n.
- À toute partie S correspond sans ambiguïté son complémentaire $\overline{S} = E \setminus S$. Si S contient k éléments, alors $\overline{S}$ en contient $n-k$ (propriété 1).
  Autrement dit, le nombre de parties à k éléments est égal au nombre de parties à $n-k$ éléments. Ainsi : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Il y a une seule partie à 0 éléments, c'est $\varnothing$; il y a une seule partie à n éléments, c'est E tout entier. Ainsi : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Il y a n parties à 1 élément. En effet, on a n choix possibles pour l'élément qui la constitue. De même, il y a n partie à $n-1$ éléments. En effet, on a n choix possibles pour l'élément qu'on laisse de côté. Ainsi : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

6.3 Relation et triangle de Pascal

Soit E un ensemble fini à n éléments, et a un élément quelconque de E. Soit F, le sous-ensemble de E formé de tous les éléments, sauf a. Le nombre d'éléments de F est bien sûr $n-1$.

On peut classer en deux groupes les parties à k éléments de E : celles qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas. On va dénombrer séparément ces deux groupes.

- Les parties à k éléments ne contenant pas a sont formées de k éléments choisis dans F. Leur nombre est donc $\binom{n-1}{k}$.
- Les parties à k éléments qui contiennent a sont formées de a et de $k-1$ éléments choisis dans F. Leur nombre est donc $\binom{n-1}{k-1}$.

Ces deux groupes étant disjoints, on obtient d'après la propriété 1 : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

On trouve aussi cette propriété exprimée sous la forme : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Application : le triangle de Pascal.

Pour $n \leq 5$, on peut calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche à l'aide du tableau ci-contre :

- on place des 1 sur la première colonne et la diagonale ;
- on obtient un autre nombre du tableau en ajoutant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente.

Bien sûr, on peut continuer au-delà de 5.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

7 Lien entre nombre d'arrangements et nombres de combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Considérons l'ensemble A des k-arrangements de E et l'ensemble C des combinaisons à k éléments de E.

À un k-arrangement $(x_1\,; x_2\,; \ldots\,; x_k)$ de A, faisons correspondre la combinaison $\{x_1\,; x_2\,; \ldots\,; x_k\}$. Intuitivement, cela revient à passer d'une liste ordonnée d'éléments à un ensemble où ils sont donnés « en vrac ».

Par ce moyen, à un k-arrangement de A correspond une combinaison de C. Mais combien de k-arrangement de A correspondent à une même combinaison de C ? C'est assez simple : ce sont les arrangements qu'on obtient en plaçant les éléments de cette combinaison dans n'importe quel ordre. Ce sont les permutations d'un ensemble à k éléments. Il y en a donc $k!$.

On obtient ainsi : nombre de k-arrangements de E= nombre de combinaisons de k éléments $\times$ $k!$

Autrement dit : nombre de combinaisons de k éléments $= \dfrac{\text{nombre de } k\text{-arrangements}}{k!}$

On en déduit la formule : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Par exemple, pour $k = 2$, on obtient : $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

On peut retrouver à l'aide de cette formule les propriétés déjà obtenues pour les coefficients binomiaux :

- La formule donne clairement le même résultat lorsqu'on remplace k par $n-k$.
- $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{n! \times 0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$
- $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$
- $\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \dfrac{(n-1)! \times k}{(n-k)!(k-1)! \times k} = \dfrac{(n-1)! \times k}{(n-k)! \times k!}$

  $\binom{n-1}{k} = \dfrac{(n-1)!}{((n-1)-k)!k!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)! \times k!} = \dfrac{(n-1)! \times (n-k)}{(n-k) \times (n-k-1)! \times k!} = \dfrac{(n-1)! \times (n-k)}{(n-k)! \times k!}$

  Donc : $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \dfrac{(n-1)! \times k}{(n-k)!k!} + \dfrac{(n-1)! \times (n-k)}{(n-k)!k!} = \dfrac{(n-1)! \times k + (n-1)! \times (n-k)}{(n-k)!k!}$

  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \dfrac{(n-1)! \times (k + (n-k))}{(n-k)!k!} = \dfrac{(n-1)! \times n}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

8 Propriétés des coefficients binomiaux

Récapitulons :

Propriété 7

Soit n, k deux entiers naturels avec $k \leq n$..

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. Pour $1 \leq k \leq n-1$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
5. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

9 Hors programme : Formule du binôme

Propriété 8

Pour tous nombres a et b, et pour tout entier $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

En abrégé : $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$