Continuité

1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I.

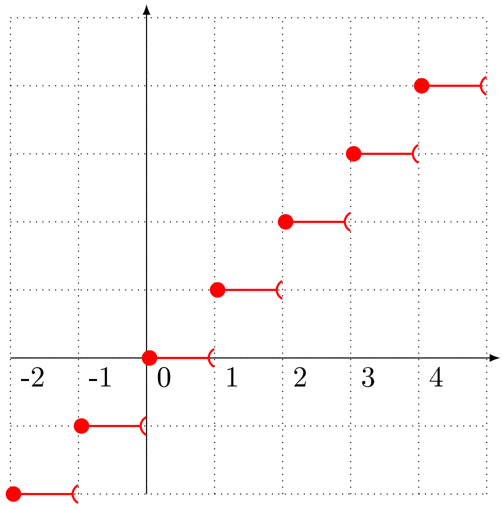
Définition 1
On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Rappel : Supposons que a n'est pas une borne de I. Lorsqu'on écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, cela signifie implicitement que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$. Donc la limite est $f(a)$ « des deux côtés ».

Définition 2
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel a appartenant à I.

Exemples : La fonction « carré » est continue.

La fonction « partie entière », représentée ci-dessous, est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.



2 Continuité des fonctions usuelles

1. Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
2. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions rationnelles sont continues sur les intervalles où leur dénominateur ne s'annule pas.
4. Les fonctions somme, produit, composée de fonctions continues sont continues.
5. En pratique, toutes les fonctions usuelles sont continues par intervalles...

Attention cependant : une fonction dérivable en a est continue en a mais la réciproque est fausse.

Contre-exemples classiques : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0. Idem pour la fonction racine carrée.

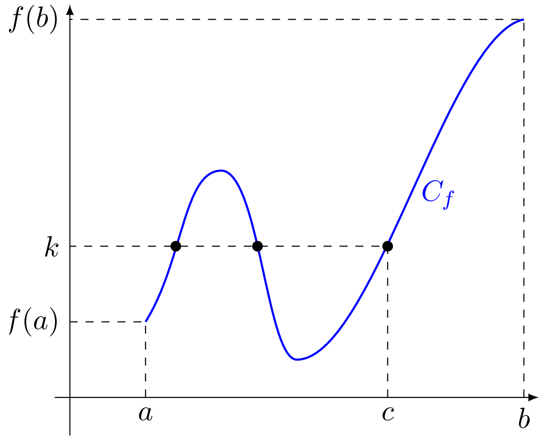
3 Propriétés des fonctions continues

Propriété 1
Soit (u_n) une suite, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue en a.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Démonstration :
Quand n tend vers $+\infty$, u_n devient infiniment proche de a. Comme f est continue en a, alors $f(u_n)$ devient infiniment proche de $f(a)$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$. ■

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

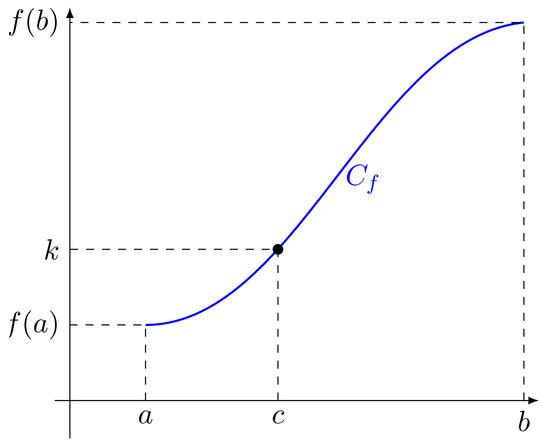
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution (au moins) dans $[a;b]$.



On peut démontrer ce théorème par une méthode de dichotomie (exercice).

Théorème 2 (Théorème de la bijection)
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $[a;b]$.



Remarque : Si l'intervalle considéré est ouvert, on remplace $f(a)$ et $f(b)$ par des limites. Le théorème des valeurs intermédiaires devient :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a;b[$. Pour tout k compris **strictement** entre $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$, il existe un réel c compris (strictement) entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution (au moins) dans $]a;b[$, et cette solution est unique si f est strictement monotone.