Limites de fonctions

1 Un peu d'histoire

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux.

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVIIe siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation). Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le Cours d'Analyse de Cauchy (1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse.

2 Définitions

La définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ ressemble beaucoup à celle de la limite d'une suite.

Soit f une fonction numérique ; A, B, ℓ, r, a des nombres réels, avec $r > 0$.

Définition 1
La limite en $+\infty$ de la fonction f est $+\infty$ si $f(x) \in [A\,;+\infty[$ pour tout x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La limite en $+\infty$ de la fonction f est $-\infty$ si $f(x) \in]-\infty\,;B]$ pour tout x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

La limite en $+\infty$ de la fonction f est ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour tout x assez grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

On pose les mêmes définitions lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un nombre fini a. Cependant, il faut en général distinguer deux cas, selon que x tend vers a en restant inférieur à a ou en restant supérieur à a. Récapitulons :

L'expression :	Signifie :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.

Notation et vocabulaire :

On note aussi $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ pour $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et on parle de limite à gauche (ou : par valeurs inférieures) en a.

On note aussi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ pour $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$, et on parle de limite à droite (ou : par valeurs supérieures) en a.

Remarque :

Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, il est entendu que les limites $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ sont égales.

3 Limites de référence

Propriété 1

Limites en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x = \lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = ... = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Limites en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} x = \lim_{x \to -\infty} x^3 = ... = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^4 = ... = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Limites en 0^- :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^3 = ... = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3} = ... = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^4} = ... = +\infty$$

Limites en 0^+ :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^3 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = ... = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Remarque :

Plutôt que les apprendre par cœur, il faut savoir retrouver ces limites à l'aide de deux ingrédients : la règle des signes et l'idée empirique suivante : l'inverse d'un nombre voisin de 0 est voisin de l'infini, et réciproquement.

Propriété 2

Soit n un entier naturel.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

L'idée intuitive est celle-ci : si on a une forme indéterminée, l'exponentielle l'emporte. **Attention** de bien noter : *si on a une forme indéterminée.*

Par exemple, $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \mathrm{e}^x = -\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée, la règle intuitive ne s'applique pas.

4 Opérations et limites

Règle empirique : on effectue la même opération sur les limites que celle effectuée sur les fonctions, sous réserve que cette opération ait un sens.

Propriété 3
Soient ℓ et m deux nombres ; soient f et g deux fonctions. Dans chacun des tableaux suivants, λ représente $+\infty$, $-\infty$, a^- ou a^+.

Somme :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et : $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) =$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x)+g(x) =$	$\ell+m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et : $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) =$	m	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x)\times g(x) =$	$\ell\times m$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes.

Inverse :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^-	0^+	0
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} \dfrac{1}{f(x)} =$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

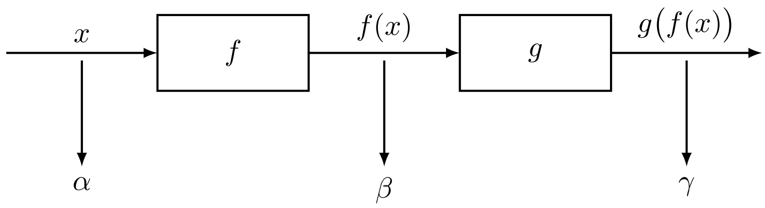
Propriété 4
La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Attention ! Cette règle ne s'applique que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

5 Limite d'une fonction composée

Soient f et g, deux fonctions. Les symboles α, β et γ représentent $+\infty$, $-\infty$, a^- ou a^+.

Propriété 5
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$.



Remarque : On obtient une propriété du même type en remplaçant la fonction f par une suite.

6 Limites et comparaison

Il s'agit ici de déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. Comme précédemment, λ représente $+\infty$, $-\infty$, a^- ou a^+.

Propriété 6
Soient f et g, deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$ existent et sont finies.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x voisin de λ, alors $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$.

En particulier, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \leq \alpha$ pour tout x voisin de λ, alors $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) \leq \alpha$.

(**Attention** : cette propriété est fausse si on remplace $\leq$ par $<$).

Propriété 7
Soient f, g, h, trois fonctions telles que :
- pour tout x voisin de λ, on a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) = \lim\limits_{x\to\lambda} h(x)$

Alors g a la même limite que f et h, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) = \lim\limits_{x\to\lambda} f(x) = \lim\limits_{x\to\lambda} h(x)$.

Propriété 8
Soient f et g, deux fonctions telles que pour tout x voisin de λ, on a $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) = -\infty$.

7 Asymptotes

Soit f une fonction, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et a, b un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$.

Remarque : On parle dans ce cas d'asymptote « horizontale », puisque la droite d'équation $y = b$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$.

Remarque : On parle dans ce cas d'asymptote « verticale », puisque la droite d'équation $x = a$ est parallèle à l'axe des ordonnées.