La fonction logarithme népérien

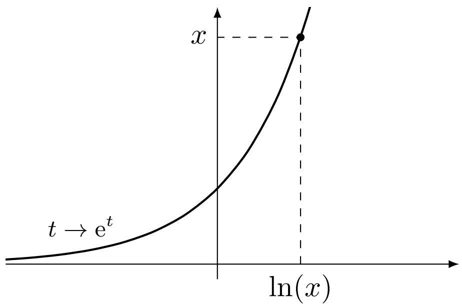
1 Un peu d'histoire

Les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme et les fonctions trigonométriques illustrent les liens entre discret et continu et fournissent une source féconde d'activités. On peut mentionner les méthodes de Ptolémée et d'Al Kashi, la méthode de Briggs ou l'utilisation de développements en série. Ces travaux, dont certains ont été anticipés hors d'Europe, par exemple en Inde par l'école du Kerala, indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.

2 Définition

Rappel : la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, on peut en déduire que pour tout réel $x > 0$, l'équation d'inconnue y : $\mathrm{e}^y = x$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

On note cette solution : $\ln(x)$, qui se lit « logarithme népérien de x » (du nom de Napier (1550-1617), mathématicien écossais). Autrement dit, $\ln(x)$ est l'antécédent de x par la fonction exponentielle.



Définition 1

Pour tout $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel tel que $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

On obtient ainsi une nouvelle fonction, définie sur $]0; +\infty[$ et à valeur dans $\mathbb{R}$: la fonction logarithme népérien.

NB : Quand on parle de logarithme, sans précision, il est entendu qu'on parle de logarithme népérien. On adopte cette convention pour la suite du cours.

Remarque : On a $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$, mais que vaut $\ln(\mathrm{e}^x)$?

D'abord, $\ln(\mathrm{e}^x)$ existe pour tout x, car $\mathrm{e}^x > 0$. D'après la définition, $\ln(\mathrm{e}^x)$ est l'antécédent (unique) de e^x par la fonction exponentielle. C'est donc x.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

On dit que la fonction logarithme est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle.

En prenant $x = 0$ et $x = 1$, on en déduit en particulier : $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

3 Relation fonctionnelle

Rappel : on sait que pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ (propriété 1 du cours sur la fonction exponentielle).

Soient $a > 0$, $b > 0$. On a par définition : $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a \times b)}$.

D'autre part, $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$.

Ainsi : $\mathrm{e}^{\ln(a \times b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, l'égalité des images implique l'égalité des antécédents : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Conséquences :

$\ln(a) = \ln\left(b \times \dfrac{a}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$. Par conséquent : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$: $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + ... + \ln(a)}_{n \text{ termes}} = n\ln(a)$.

On en déduit : $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n\ln(a)$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Récapitulons :

Propriété 1
Quels que soient $a,\ b \in]0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln(a^n) = n\ln(a)$

La troisième relation sert en particulier à résoudre une équation dont l'inconnue est une puissance.

4 Variations

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

D'après la définition, ceci s'écrit : $\mathrm{e}^{\ln(a)} < \mathrm{e}^{\ln(b)}$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, ceci implique : $\ln(a) < \ln(b)$ (les antécédents sont dans le même ordre que les images).

Ainsi $a < b$ implique $\ln(a) < \ln(b)$.

Propriété 2
La fonction logarithme est strictement croissante.

5 Continuité

On admet que la fonction logarithme est continue.

Remarque : il suffit d'admettre que $\lim\limits_{x \to a} \ln(x)$ existe. Alors cette limite ne peut être que $\ln(a)$.

Supposons en effet que $\lim\limits_{x \to a} \ln(x) = \ell \neq \ln(a)$. Alors, comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante, on aurait $\lim\limits_{x \to a} \exp(\ln(x)) = \exp(\ell) \neq \exp(\ln(a))$, c'est à dire : $\lim\limits_{x \to a} x \neq a$, ce qui est absurde.

6 Dérivée

Soit un réel $a > 0$, h un réel suffisamment proche de 0. On cherche $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h}$ (si elle existe).

On sait que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\exp'(b) = \exp(b)$, c'est à dire : $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{b+k} - \mathrm{e}^b}{k} = \mathrm{e}^b$.

Comme $\mathrm{e}^k \neq 0$, on en déduit (limite de l'inverse) : $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{k}{\mathrm{e}^{b+k} - \mathrm{e}^b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b}$

Posons à présent : $b = \ln(a)$ et $k = \ln(a+h) - \ln(a)$. Alors : $b + k = \ln(a+h)$, $\mathrm{e}^b = a$ et $\mathrm{e}^{b+k} = a + h$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0} \ln(a+h) - \ln(a) = 0 \text{ (ln est continue)} \\ \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{k}{\mathrm{e}^{b+k} - \mathrm{e}^b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b} \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(a+h) - \ln(a)}{(a+h) - a} = \dfrac{1}{a} \quad \text{(par composition de limites)}$$

On simplifie : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} = \dfrac{1}{a}$. Conclusion : pour tout $a > 0$, $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$.

Propriété 3
La fonction logarithme est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque :

Si on admet que la fonction logarithme est dérivable, la formule donnant sa dérivée se déduit facilement de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.

En effet, posons pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$: $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$. On va évaluer de deux façons $f'(x)$.

D'après le cours sur la dérivation, on a : $f'(x) = \ln'(x)\mathrm{e}^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$.

D'autre part, $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$.

Ainsi : $\ln'(x) \times x = 1$; donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

7 Limites

Propriété 4

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Moyen mnémotechnique : lorsqu'on a une forme indéterminée, on dit que « x l'emporte sur $\ln(x)$ », ou que « x impose sa limite » .

On démontre cette propriété à partir des limites de la fonctions exponentielle, en posant $y = \ln(x)$, donc $\mathrm{e}^y = x$.

Démontrons par exemple que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{y\to -\infty} e^y \times y = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(x)} \times \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{(par composition de limites)}$$

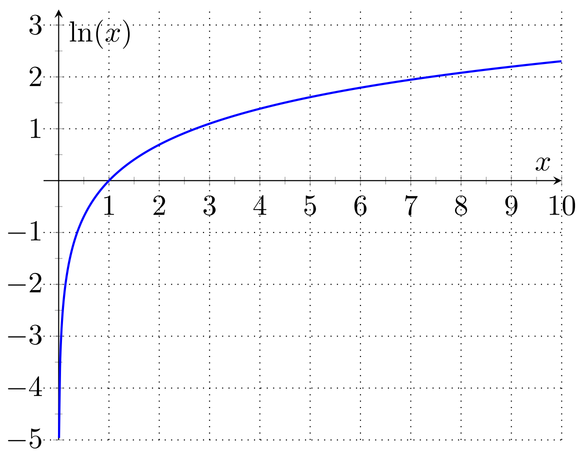
Remarque : On peut rencontrer la forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

L'astuce, ici, est de réécrire cette limite sous la forme suivante :

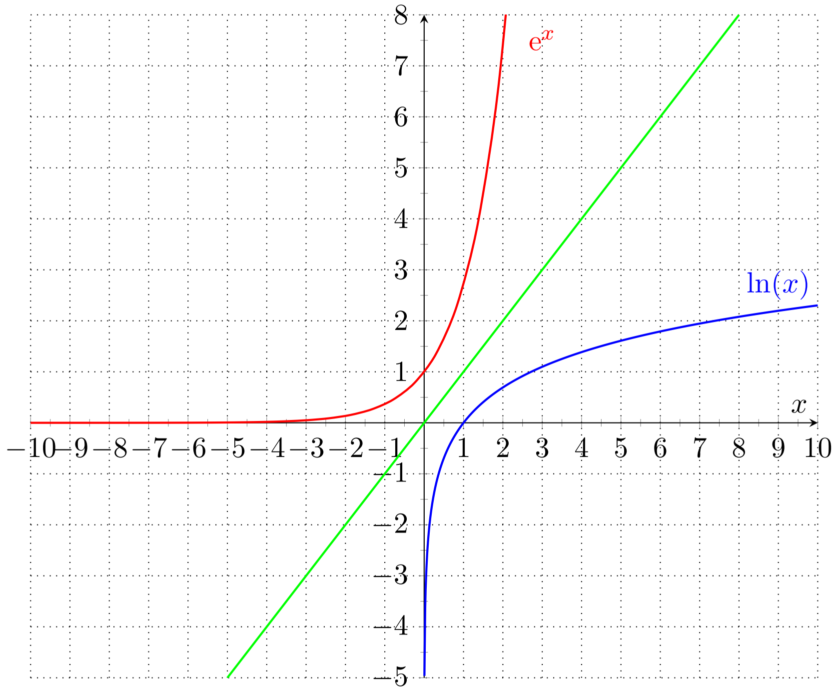
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

8 Tableau et courbe

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖			$+$			
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



Il est intéressant de remarquer la symétrie des courbes de la fonction logarithme et de la fonction exponentielle par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).



9 Complément : exposant réel d'un nombre positif

Soit x un réel strictement positif et $n \in \mathbb{Z}$.

On sait que $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Par conséquent : $x^n = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$. Comme on l'a déjà fait pour e, on va poser :

Définition 2

$$\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$$

On définit ainsi la fonction puissance α, mais **attention** : elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Propriété 5
Soit un réel $x > 0$, α et β deux réels quelconques.
$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$; $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, etc.

Ces propriétés se déduisent de celles de l'exponentielle et du logarithme. Par exemple :

$x^{\alpha+\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}\,\mathrm{e}^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta$; $(x^\alpha)^\beta = \mathrm{e}^{\beta\ln(x^\alpha)} = \mathrm{e}^{\beta\ln(\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)})} = \mathrm{e}^{\beta\alpha\ln(x)} = x^{\alpha\beta}$.