Fonctions sinus et cosinus

1 Rappels.

1.1 Associer un nombre à un point du cercle trigonométrique.

On a vu en seconde comment enrouler la droite numérique sur le cercle trigonométrique.

On rappelle que le plan est supposé rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Par enroulement, à chaque réel α, on associe le point $T(1\,;\,\alpha)$ de la droite Δ d'équation $x = 1$, puis le point M du cercle sur lequel T vient s'appliquer par enroulement.

Soit M un point de $\mathcal{C}$. Il y a une infinité de réels associés à M par enroulement. Si α est l'un d'eux, alors tous les autres sont de la forme $\alpha + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1.2 Cosinus et sinus.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ associé au réel α.

Définition 1
On appelle cosinus de α, noté $\cos(\alpha)$, l'abscisse de M et sinus de α, noté $\sin(\alpha)$, l'ordonnée de M.

2 Les fonctions sinus et cosinus.

Définition 2
La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$. La fonction sinus est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

2.1 Propriétés classiques.

1. Les réels x et $x + 2\pi$ sont associés au même point du cercle $\mathcal{C}$.
   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.
   On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
   On dit que la fonction cosinus est **paire** et que la fonction sinus est **impaire**.
5. Les formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

2.2 Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

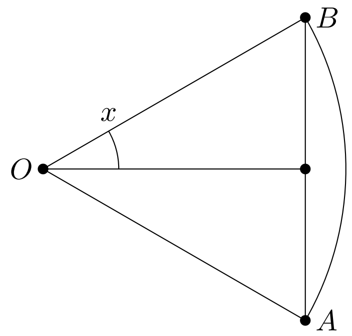
3 Dérivée des fonctions trigonométriques

3.1 Un calcul de limite.

Théorème 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ce théorème est admis, mais on peut en donner une illustration.



Supposons que le cercle est de rayon 1. Le dessin suggère que la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est proche de la longueur du segment $[AB]$ lorsque l'angle $\widehat{AOB}$ est petit. Notons $2x$ la longueur de $\widehat{AB}$; comme $\mathcal{C}$ est de rayon 1, $2x$ est aussi une mesure en radians de $\widehat{AOB}$.

Ainsi, $\widehat{AB} \simeq AB$ se traduit par : $2\sin(x) \simeq 2x$, soit $\sin(x) \simeq x$ lorsque x est très petit.

Exprimée en terme de limite, cette affirmation donne le théorème 1.

3.2 Conséquence.

D'après les formules d'addition, on a :

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.

Donc : $\cos(2\alpha) - 1 = -2\sin^2(\alpha)$.

Donc : $\dfrac{\cos(2\alpha) - 1}{2\alpha} = -\dfrac{\sin^2(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha^2} \times \alpha$.

Or, d'après le théorème 1 : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$. Donc, d'après la propriété sur la limite d'un produit : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} = 1$.

Par conséquent, d'après la même propriété, on a : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\cos(2\alpha) - 1}{2\alpha} = 0$. En remplaçant 2α par x, cela donne :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{1}$$

3.3 Dérivée de la fonction cosinus.

On utilise les formules d'addition.

$\dfrac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \dfrac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} = \cos(a)\dfrac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a)\dfrac{\sin(h)}{h}$

Par conséquent :

$\cos'(a) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \cos(a) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$

Compte tenu du théorème 1 et de l'égalité (1) ci-dessus, on en déduit :

$\cos'(a) = \cos(a) \times 0 - \sin(a) \times 1 = -\sin(a)$

3.4 Dérivée de la fonction sinus.

On applique la même méthode :

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

Par conséquent :

$$\sin'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

On en déduit :

$\sin'(a) = \sin(a)\times 0 + \cos(a)\times 1 = \cos(a)$

Récapitulons :

Théorème 2
Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\cos'(a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$

3.5 Conséquence.

Les fonctions cosinus et sinus sont **continues** sur $\mathbb{R}$.

4 Étude des fonctions cosinus et sinus

4.1 Les tableaux de variations :

On donne les variations sur $[0;2\pi]$; comme cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, on observe les mêmes variations sur $[2\pi;4\pi]$, sur $[4\pi;6\pi]$, sur $[-2\pi;0]$, etc.

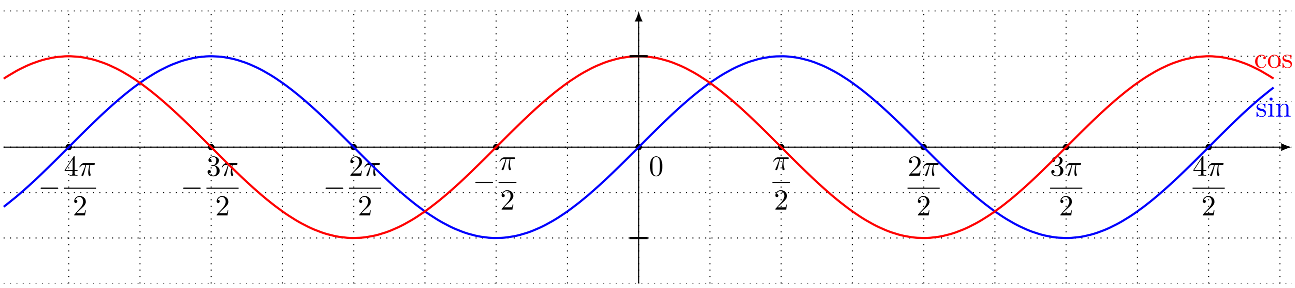
On peut observer directement les variations de cosinus et sinus à partir de leur définition en se déplaçant sur le cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	0	-1	$\nearrow$	0

4.2 Représentation graphique.

On remarque la périodicité.

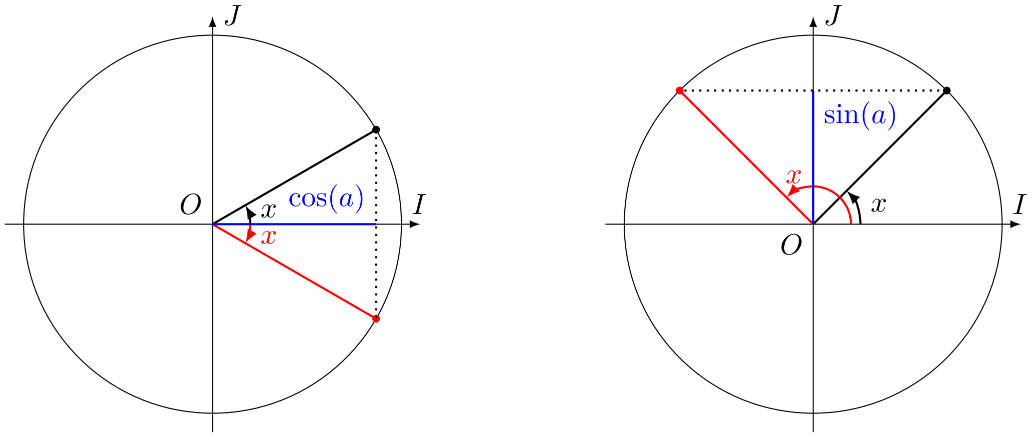


5 Les équations et inéquations

Résolution d'une équation sur $\mathbb{R}$:

Propriété 1
Soit a un nombre réel donné quelconque.

- $\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + k2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Résolution sur $]-\pi\,;\pi]$: On garde, parmi les solutions précédentes, celles qui appartiennent à cet intervalle.

Résolution d'une inéquation : on utilise le cercle ou la courbe de la fonction correspondante pour déterminer l'ensemble solution et on obtient la valeur d'une borne en résolvant une équation.

6 Complément : fonction tangente

Définition 3
Pour tout réel x non multiple de π, on définit la **tangente** de x : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

La fonction correspondante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, est la fonction tangente.

Propriété 2
La fonction tangente est périodique, de période π.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Elle est donc continue et strictement croissante sur tout intervalle du type $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exemple entre $-\pi$ et π :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\tan'(x)$		$+$	‖		$+$		‖	$+$	
$\tan(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0