Géométrie dans l'espace (I) - Calcul vectoriel

1 Un peu d'histoire

Les concepts sous-jacents à la notion de vecteur apparaissent comme modèles physiques dynamiques longtemps avant leur formalisation. On trouve un concept de force et la composition des forces chez Newton ; ces notions, comme celles de vitesse, sont présentes dans le calcul géométrique de Leibniz. Au XIX^{e} siècle, la notion de vecteur va émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation ou comme outil de repérage.

Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique. Dans sa théorie des forces et des marées de 1839, Grassmann propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur et lui associe des règles de calcul algébrique, notamment un « produit linéaire » utilisant la projection orthogonale et qui deviendra notre produit scalaire. À la fin du siècle, des auteurs proches des mathématiques comme de la physique (Maxwell, Gibbs, Heaviside ou Peano) dégagent les principes du calcul vectoriel à trois dimensions ou plus, lui donnant une dimension dynamique tout en établissant la structure d'espace vectoriel.

2 Définitions et rappels

2.1 Rappels - Règles usuelles

Les règles du calcul vectoriel dans l'espace sont les mêmes que dans le plan. On donne la même définition d'un vecteur par direction, sens et norme. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, deux vecteurs et a, b, deux réels. On a :

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

$$\|a\vec{u}\| = |a| \times \|\vec{u}\|$$

Un vecteur permet aussi de définir une translation de l'espace. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation qui transforme A en B. Ainsi, un point M et son image M' sont tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

2.2 Rappels - Colinéarité

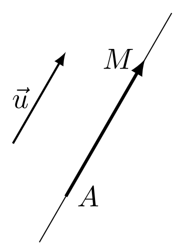
Rappel : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

2.3 Rappels - Définition d'une droite

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et A un point.

Définition 1
La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.



2.4 Vocabulaire : combinaison linéaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, 3 vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{w}$ est **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

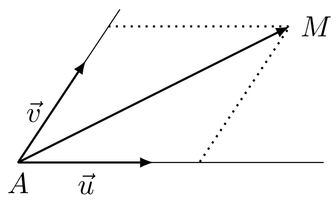
De même, on dit que le vecteur $\vec{t}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe trois réels a, b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, et ainsi de suite avec un nombre quelconque de vecteurs.

2.5 Définition d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** de l'espace et A un point.

Définition 2
Le plan $\mathscr{P}$ défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Autrement dit : « M appartient au plan $\mathscr{P}$ » est équivalent à : « il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ».



Le couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme la **direction** du plan $\mathscr{P}$.

3 Vecteurs coplanaires

Définition 3
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si l'un des trois est combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec a, $b \in \mathbb{R}$.

Remarque : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'ils peuvent être représentés dans un même plan.

Cas particuliers :

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{0}$ sont toujours coplanaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème 1
Il y a équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Propriété 1
Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$, et soient $\vec{r}$ et $\vec{s}$, deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.
Alors $\mathscr{P}$ est aussi défini par $(A, \vec{r}, \vec{s})$. Autrement dit, la direction $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est identique à la direction $(\vec{r}\,;\vec{s})$.

4 Bases et repères de l'espace

Définition 4
L'espace usuel est défini par les deux conditions suivantes :

1. Il existe trois vecteurs non coplanaires.
2. Étant donnés trois vecteurs non coplanaires (arbitrairement choisis), tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Autrement dit, si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On dit que le triplet $(x\,;y\,;z)$ forme les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la **base** $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

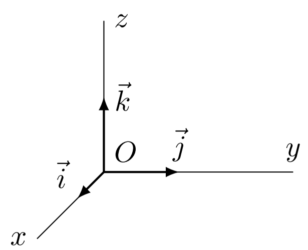
Conséquence : Soit O un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout point M, il existe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

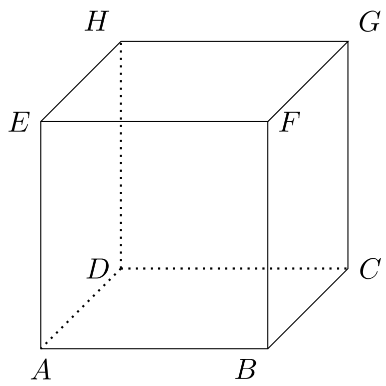
Le triplet $(x\,;y\,;z)$ forme les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$; par définition, il forme aussi les coordonnées du point M dans le **repère** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Vocabulaire : On appelle x : l'abscisse, y : l'ordonnée, z : la cote du point M.

On représente traditionnellement ainsi le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$:



Exemple basique : On considère le cube représenté ci-dessous.



L'espace étant rapporté au repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, les coordonnées des sommets sont :

$A(1\,;0\,;0)$, $B(1\,;1\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(0\,;0\,;0)$, $E(1\,;0\,;1)$, $F(1\,;1\,;1)$, $G(0\,;1\,;1)$, $H(0\,;0\,;1)$.

5 Applications

5.1 Coordonnées et colinéarité

La propriété suivante découle directement de la définition : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

C'est la même propriété que dans le plan, sauf qu'il y a trois coordonnées.

5.2 Coordonnées et coplanarité

Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$. Comment savoir si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

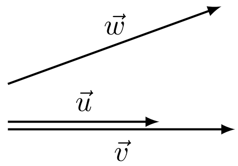
a) On cherche d'abord si deux des vecteurs sont colinéaires. Dans ce cas, les trois vecteurs sont ipso facto coplanaires.

$b)$ Dans le cas contraire, on cherche à exprimer un des vecteurs, par exemple $\vec{w}$, comme combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit, on résout le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} x'' &= ax + bx' \\ y'' &= ay + by' \\ z'' &= az + bz' \end{cases}$$

Si ce système admet un couple $(a; b)$ solution, alors on peut en déduire que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Dans le cas contraire, les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Attention : il faut bien vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires pour pouvoir conclure. En effet, supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Si $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ lui aussi, alors il ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; pourtant, dans ce cas, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont bien coplanaires (illustration ci-dessous).



Exemple : On donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

$a)$ On voit que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles : $\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$b)$ On résout le système :

$$\begin{cases} 5 &= a &+ &2b \\ 2 &= & &b \\ 4 &= 2a &+ &b \end{cases} \tag{1}$$

On commence par résoudre le sous-système constitué des deux premières lignes. On trouve : $a = 1$ et $b = 2$. On cherche si la solution obtenue est compatible avec la dernière ligne : $4 = 2 \times 1 + 2$. C'est vrai. Donc $(1; 2)$ est bien solution du système (1). On a ainsi : $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$. Les trois vecteurs sont coplanaires.

5.3 Représentation paramétrique d'une droite

Soient un vecteur $\vec{u}(a\,;b\,;c))$ et un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$.

La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

On obtient donc en passant aux coordonnées : $\begin{cases} x = & x_A + ta \\ y = & y_A + tb \\ z = & z_A + tc \end{cases}$

Le système précédent constitue une **représentation paramétrique** de la droite d définie par $(A, \vec{u})$. Réciproquement, un système de cette forme constitue la représentation paramétrique d'une droite.

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, puisque qu'il y a une infinité de choix possibles pour A et $\vec{u}$.

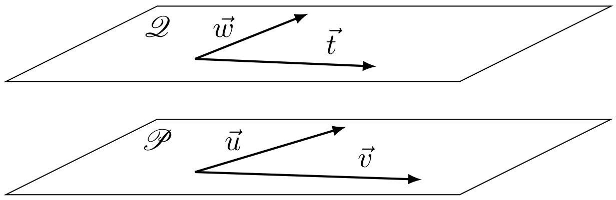
Exemple : Le système : $\begin{cases} x = & 1 + 3t \\ y = & -5t \\ z = & 1,5 + 0,2t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\0\\1,5\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\\0,2\end{pmatrix}$.

6 Position relative de droites et plans

6.1 Position relative de deux plans

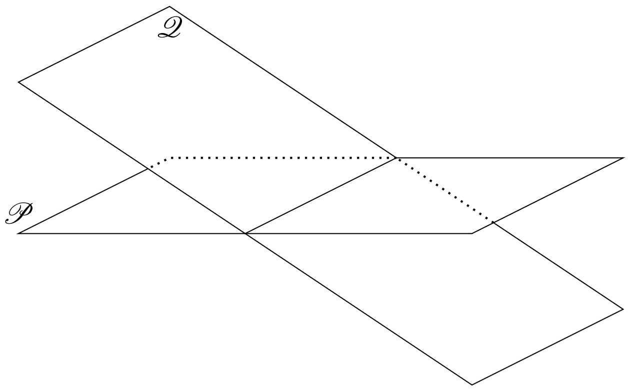
Soient deux plans $\mathscr{P}$ défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ défini par $(B, \vec{w}, \vec{t})$.

Propriété 2
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles distincts ou confondus. On dit qu'ils ont la même direction.



Conséquence directe : si $\mathscr{P}$ est défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ est défini par $(B, \vec{u}, \vec{v})$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles (au sens large : ils ont la même direction).

Propriété 3
Deux plans de directions différentes sont sécants et leur intersection est une droite.



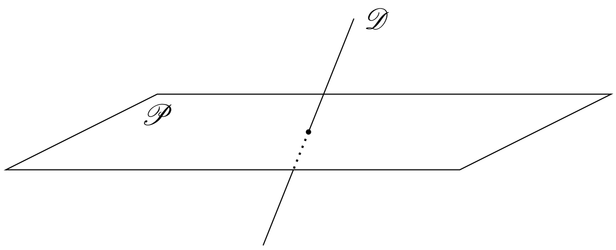
6.2 Position relative d'un plan et une droite

Soit d une droite définie par $(A, \vec{u})$ et $\mathscr{P}$ un plan.

Définition 5
On dit que d est parallèle à $\mathscr{P}$ (au sens large) si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$. De manière équivalente, on peut dire : d est parallèle à $\mathscr{P}$ si d est parallèle à une droite de $\mathscr{P}$.

Propriété 4
Si d est parallèle à $\mathscr{P}$, on a soit $d \subset \mathscr{P}$, soit $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

Propriété 5
Si d n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$, alors d coupe $\mathscr{P}$ en un point.



6.3 Position relative de deux droites

Soient deux droites : d définie par $(A, \vec{u})$ et d' définie par $(B, \vec{v})$.

On dit que d et d' ont la même direction si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On vérifie facilement que dans ce cas, d et d' sont confondues (cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires) ou parallèles distinctes.

On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont incluses dans un même plan (autrement dit, il existe un plan qui les contient toutes les deux.)

Propriété 6
Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont soit sécantes soit de même direction.

Deux droites qui ne sont ni sécantes, ni parallèles (au sens large) sont donc non coplanaires.

6.4 Exemples

Reprenons le cube de la page 3.

Les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Les droites (AB) et (AD) sont sécantes. Les droites (AB) et (EH) ne sont pas coplanaires (elles ne sont donc ni sécantes ni parallèles).

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. Les plans (ABC) et (AED) sont sécants.

La droite (BC) est parallèle au plan (AED). La droite (AG) est sécante au plan (AED).

7 Parallélisme de droites et plans

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$, trois plans ; soient d, d' et d'', trois droites.

Propriété 7
On suppose que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

- Si $\mathscr{R} // \mathscr{P}$, alors $\mathscr{R} // \mathscr{Q}$.
- Si $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{Q}$, et les droites intersections sont parallèles.
- Si $d // \mathscr{P}$, alors $d // \mathscr{Q}$.
- Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d est sécante à $\mathscr{Q}$.

Propriété 8
On suppose que d et d' sont parallèles.

- Si $d'' // d$, alors $d'' // d'$.
- Si $d // \mathscr{P}$, alors $d' // \mathscr{P}$.
- Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d' est sécante à $\mathscr{P}$.

Attention : Si d'' est sécante à d, on ne peut pas en conclure que d' et d'' sont sécantes.

Par exemple, dans le cube (page 3), $(AD) // (BC)$ et (AH) est sécante à (AD) mais pas à (BC).

Propriété 9
On suppose que d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.

- Si $\mathscr{P} // \mathscr{Q}$, alors $d // \mathscr{Q}$.
- Si $d // d'$, alors $d' // \mathscr{P}$.

Attention :

Lorsque d est parallèle à la fois à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas forcément parallèles. S'ils sont sécants, alors leur intersection est une droite parallèle à d (au sens large : parallèle ou confondue). C'est la propriété suivante :

Propriété 10
Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans sécants ; soit d une droite parallèle à la fois à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{Q}$. Alors d est parallèle à la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

8 Les démonstrations

Théorème 1 :

Il y a équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Démonstration :
Supposons qu'on ait $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w} = \vec{0}$, où a, b et c ne sont pas tous les trois égaux à 0. Par exemple, supposons $a \neq 0$. Alors en divisant par a et en isolant $\vec{u}$, on déduit de l'égalité précédente : $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} + \frac{c}{a}$. Donc $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

Réciproquement, supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors l'un des trois, par exemple $\vec{u}$, est combinaison linéaire des deux autres : il existe deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

On en déduit : $\vec{u} - x\vec{v} - y\vec{w} = \vec{0}$. C'est l'égalité du théorème avec $a = 1$, $b = -x$ et $c = -y$. ■

Propriété 1 :

Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$, et soient $\vec{s}$ et $\vec{r}$, deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Alors $\mathscr{P}$ est aussi défini par $(A, \vec{r}, \vec{s})$. Autrement dit, la direction $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est identique à la direction $(\vec{r}\,;\vec{s})$.

Démonstration :
Étape 1 : Commençons par prouver ceci :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs coplanaires, tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Comme $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il existe trois réels a, b, c avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $c \neq 0$. Donc on peut écrire $\vec{w} = -\frac{a}{c}\vec{u} - \frac{b}{c}\vec{v}$, donc $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Étape 2 : On démontre à présent la propriété.

Si M appartient au plan défini par $(A, \vec{r}, \vec{s})$, alors $\overrightarrow{AM} = x\vec{r} + y\vec{s}$. D'après l'étape 1, $\vec{r}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v}$. De même, $\vec{s}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{s} = c\vec{u} + d\vec{v}$.

On en déduit : $\overrightarrow{AM} = x\,(a\vec{u} + b\vec{v}) + y\,(c\vec{u} + d\vec{v}) = (xa + yc)\vec{u} + (xb + yd)\vec{v}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc M appartient au plan défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

On fait le même raisonnement en permutant le rôle de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{r}, \vec{s})$, et on prouve ainsi que si M appartient au plan défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$, alors il appartient au plan défini par $(A, \vec{r}, \vec{s})$. ■

Propriété 2 :

Soient deux plans $\mathscr{P}$ défini par $(A, \vec{u}, \vec{v}\,)$ et $\mathscr{Q}$ défini par $(B, \vec{w}, \vec{t}\,)$.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles distincts ou confondus. (Ils ont la même direction.)

Démonstration :
Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ soient coplanaires. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs (non colinéaires) du plan $\mathscr{Q}$. On en déduit, d'après la propriété 1, que $\mathscr{Q}$ est aussi défini par $(B, \vec{u}, \vec{v}\,)$. Donc les deux plans ont la même direction.

Premier cas : B appartient à $\mathscr{P}$. On a alors $\overrightarrow{AB} = X\vec{u} + Y\vec{v}$, où X et Y sont deux réels.

Pour tout point $M \in \mathscr{Q}$, on a $\overrightarrow{BM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles, on peut écrire :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = (X + x)\vec{u} + (Y + y)\vec{v}$. Donc $M \in \mathscr{P}$.

On prouve de même que pour tout point $M \in \mathscr{P}$, on a $M \in \mathscr{Q}$.

Donc les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus.

Deuxième cas : B n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

S'il existait un point M appartenant à la fois à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, alors on aurait : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\overrightarrow{BM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v}$. Donc B appartiendrait à $\mathscr{P}$, ce qui est contradictoire.

Donc, il n'existe aucun point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$: les deux plans sont disjoints. ■

Propriété 3 :

Deux plans de directions différentes sont sécants et leur intersection est une droite.

Démonstration :
Démontrons d'abord que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.

Supposons $\mathscr{P}$ défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$. Alors $\mathscr{Q}$ contient au moins un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, sinon les deux plans auraient la même direction.

Alors d'après la définition 4, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de l'espace.

Soit $\vec{t}$ un vecteur de $\mathscr{Q}$ non colinéaire à $\vec{w}$. Puisque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$; de plus, $a\vec{u} + b\vec{v} \neq \vec{0}$, sinon, $\vec{t}$ serait colinéaire à $\vec{w}$.

Posons $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{t} - c\vec{w}$.

On voit que $\vec{s}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ car il est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $\vec{s}$ est aussi un vecteur de $\mathscr{Q}$ car il est combinaison linéaire de $\vec{t}$ et $\vec{w}$.

Le vecteur $\vec{s}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$; il est non colinéaire à un des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $\vec{v}$, et il est non colinéaire à $\vec{w}$. Donc, d'après la propriété 1, $\mathscr{P}$ est défini par $(A, \vec{s}, \vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ est défini par $(B, \vec{s}, \vec{w})$.

Les vecteurs $\vec{s}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires, donc ils forment une base de l'espace. Il existe donc trois réels x, y, z tels que $\overrightarrow{AB} = x\vec{s} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Soit C le point défini par $\overrightarrow{AC} = x\vec{s} + y\vec{v}$. On a alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + z\vec{w}$ donc, par la relation de Chasles : $\overrightarrow{CB} = z\vec{w}$.

Comme $\overrightarrow{AC} = x\vec{s} + y\vec{v}$, alors $C \in \mathscr{P}$. Comme $\overrightarrow{CB} = z\vec{w}$, alors $C \in \mathscr{Q}$. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ on un point commun ; ils sont donc sécants.

Démontrons à présent que l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est une droite.

Soit d la droite définie par $(C, \vec{s})$.

Soit M un point de d. Alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CM} = k\vec{s}$; $\overrightarrow{CM}$ est donc un vecteur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$, et C appartient à l'intersection des deux plans, donc M appartient aussi à cette intersection.

Réciproquement, soit M, un point appartenant à l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$.

$\overrightarrow{CM}$ est un vecteur de $\mathscr{Q}$, donc $\overrightarrow{CM} = x\vec{s} + y\vec{w}$. Si y était non nul, le vecteur $\vec{w}$ serait égal à $\dfrac{1}{y}\left(\overrightarrow{CM} - x\vec{s}\right)$. Or, $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{s}$ sont des vecteurs de $\mathscr{P}$, donc $\vec{w} = \dfrac{1}{y}\left(\overrightarrow{CM} - x\vec{s}\right)$ serait aussi un vecteur de $\mathscr{P}$, ce qui est impossible.

Ainsi, $y = 0$, et donc : $\overrightarrow{CM} = x\vec{s}$ donc $M \in d$.

Par conséquent, l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est la droite d. ■

Propriété 4

Si d est parallèle à $\mathscr{P}$, on a soit $d \subset \mathscr{P}$, soit $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

Démonstration :
Si l'intersection n'est pas vide, elle contient un point A et d est définie par $(A, \vec{u})$. Pour tout point M de d, on a : $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$. Comme $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$, alors $\overrightarrow{AM}$ aussi, et donc $M \in \mathscr{P}$. ■

Propriété 5

Si d n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$, alors d coupe $\mathscr{P}$ en un point.

Démonstration :
Supposons que d soit définie par $(A, \vec{u})$ et $\mathscr{P}$ par $(B, \vec{v}, \vec{w})$; les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires, donc ils forment une base de l'espace. Par conséquent, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = a\vec{u}$. On a alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + b\vec{v} + c\vec{w}$, donc d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{CB} = b\vec{v} + c\vec{w}$. Comme $\overrightarrow{AC} = a\vec{u}$ alors $C \in d$. Comme $\overrightarrow{CB} = b\vec{v} + c\vec{w}$ alors $C \in \mathscr{P}$.

Donc C appartient à l'intersection de d et $\mathscr{P}$. Montrons que c'est le seul point dans ce cas.

Soit $C' \in d \cap \mathscr{P}$. Alors $\overrightarrow{CC'}$ est un vecteur de d et de $\mathscr{P}$. On peut donc écrire : $\overrightarrow{CC'} = a\vec{u}$; mais alors $a = 0$, sinon $\vec{u}$ serait un vecteur de $\mathscr{P}$, ce qui est contradictoire. Donc $\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ et donc : $C = C'$.

Donc, l'intersection de d et $\mathscr{P}$ ne contient que le point C. ■

Propriété 6 :

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont soit sécantes soit de même direction.

Démonstration :
Si deux droites sont dans un même plan, on peut appliquer les propriétés de géométrie plane : on sait qu'elles sont alors parallèles (au sens large) ou sécantes.

Réciproquement : considérons deux droites d et d'.

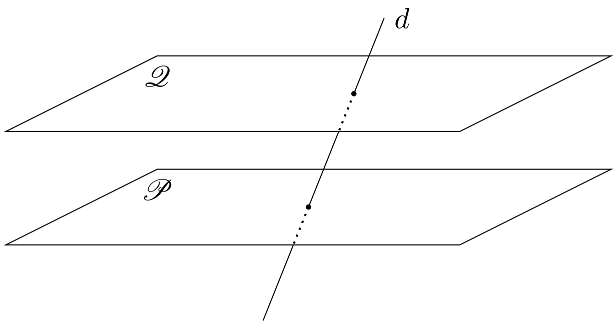
Si d et d' ont la même direction, soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et d'. Ainsi d est définie par $(A, \vec{u})$ et d' est définie par $(B, \vec{u})$. Alors d et d' sont incluses dans le plan $\mathscr{P}$ défini par $(A, \overrightarrow{AB}, \vec{u})$. En effet, si $M \in d$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + a\vec{u}$, donc $M \in \mathscr{P}$. Si $M \in d'$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = a\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + a\vec{u}$, donc $M \in \mathscr{P}$.

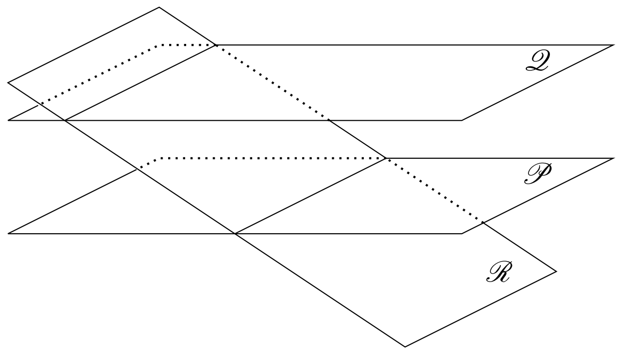
Si d et d' sont sécantes en A, alors d est définie par $(A, \vec{u})$ et d' est définie par $(A, \vec{v})$. Alors d et d' sont incluses dans le plan $\mathscr{P}$ défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$. En effet, si $M \in d$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + 0\vec{v}$, donc $M \in \mathscr{P}$. On traite de la même façon le cas $M \in d'$. ■

Propriété 7 :

On suppose que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

- Si $\mathscr{R} // \mathscr{P}$, alors $\mathscr{R} // \mathscr{Q}$.
- Si $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{Q}$, et les droites intersections sont parallèles.
- Si $d // \mathscr{P}$, alors $d // \mathscr{Q}$.
- Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d est sécante à $\mathscr{Q}$.





Démonstration :
$\mathscr{P} // \mathscr{Q}$ signifie que $\mathscr{P}$ est défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ est défini par $(B, \vec{u}, \vec{v})$ (les deux plans ont la même direction).

Si $\mathscr{R} // \mathscr{P}$, cela signifie que $\mathscr{R}$ est défini par $(C, \vec{u}, \vec{v})$ et donc $\mathscr{R} // \mathscr{Q}$.

Si $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{P}$, cela signifie qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{R}$ est non coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{Q}$.

Soit $\vec{s}$ un vecteur directeur de la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$; $\vec{s}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$, donc un vecteur de $\mathscr{Q}$. Comme c'est aussi un vecteur de $\mathscr{R}$, c'est un vecteur directeur de la droite intersection de $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$. Les deux droites intersections admettent donc $\vec{s}$ comme vecteur directeur, donc elles sont parallèles.

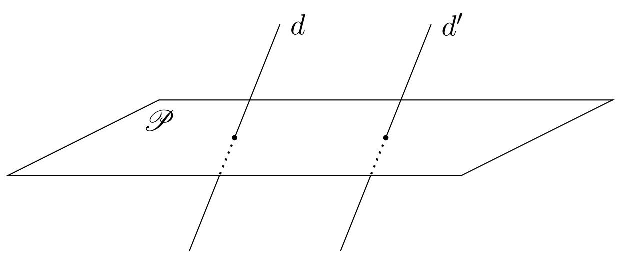
Si $d // \mathscr{P}$, cela signifie que d est définie par $(E, \vec{w})$ avec $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires, donc $d // \mathscr{Q}$.

Si d est sécante à $\mathscr{P}$, cela signifie que d est définie par $(E, \vec{w})$ avec $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires, donc d est sécante à $\mathscr{Q}$. ■

Propriété 8 :

On suppose que d et d' sont parallèles.

- Si $d'' // d$, alors $d'' // d'$.
- Si $d // \mathscr{P}$, alors $d' // \mathscr{P}$.
- Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d' est sécante à $\mathscr{P}$.



Démonstration :
d est définie par $(A, \vec{u})$ et d' par $(B, \vec{u})$.

Si $d''//d$, alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d'' , donc $d''//d'$.

Si $d//\mathscr{P}$, alors $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$, donc $d'//\mathscr{P}$.

Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de $\mathscr{P}$, donc d' est sécante à $\mathscr{P}$. ■

Propriété 9 :

On suppose que d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.

- Si $\mathscr{P}//\mathscr{Q}$, alors $d//\mathscr{Q}$.
- Si $d//d'$, alors $d'//\mathscr{P}$.

Démonstration :
d est définie par $(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$.

Si $\mathscr{P}//\mathscr{Q}$, alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur de $\mathscr{Q}$, donc $d//\mathscr{Q}$.

Si $d//d'$, alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d', donc $d'//\mathscr{P}$. ■

Propriété 10 :

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans sécants ; soit d une droite parallèle à la fois à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{Q}$. Alors d est parallèle à la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Démonstration :
Appelons Δ, la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d. Comme $d//\mathscr{P}$ alors $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$, et comme $d//\mathscr{Q}$ alors $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{Q}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$, donc c'est un vecteur directeur de leur intersection Δ. Comme d et Δ admettent toutes les deux le même vecteur directeur $\vec{u}$, elles ont même direction (elles sont parallèles au sens large). ■