Géométrie dans l'espace (II) - Produit scalaire

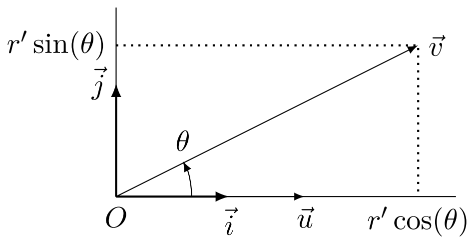
1 Rappels sur le produit scalaire

1.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et v deux vecteurs de l'espace.

Définition 1
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre défini par une des définitions équivalentes suivantes :

1. Expression dans une base **orthonormée** :
   Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$; si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.



1.2 Propriétés usuelles

Propriété 1
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k un réel.

1. Posons : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$. On a alors : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (avec la convention que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.)
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (Bilinéarité.)

Remarque : La bilinéarité du produit scalaire entraîne les identités remarquables habituelles.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

En particulier, si A, B, C sont des points de l'espace, on a la fameuse *formule d'Al-Kashi* :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2$$

Propriété 2 (Identités de polarisation)
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

1.3 Droites orthogonales

Définition 2
Deux droites sont orthogonales si elles admettent des vecteurs directeurs orthogonaux.

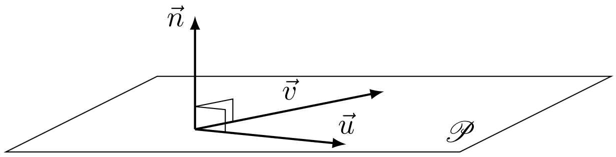
Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes. Pour signifier qu'elles sont orthogonales et sécantes, on emploie le mot « perpendiculaires ».

2 Vecteur normal à un plan

2.1 Définition

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.

Définition 3
On dit que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.



Propriété 3
Si un vecteur est normal à un plan, alors il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

On en déduit facilement le théorème suivant :

Théorème 1
Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Définition 4
On dit dans ce cas que la droite est orthogonale au plan.

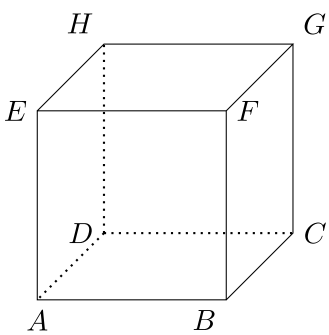
Remarque : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si tout vecteur directeur de Δ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

2.2 Plans perpendiculaires

Définition 5
Deux plans sont perpendiculaires s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Autrement dit, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires si les vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ sont des vecteurs de $\mathscr{Q}$.

2.3 Exemples dans le cube



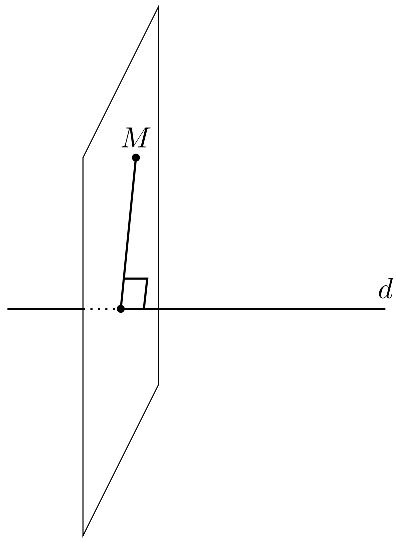
Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. La droite (AB) est orthogonale au plan (BFC).

Les plans (BFC) et (ABC) sont orthogonaux. Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est normal au plan (ABC).

3 Applications

3.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

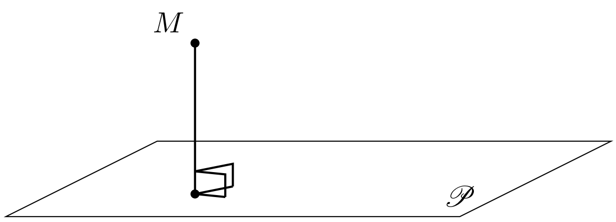
Définition 6
Soit d une droite et M un point. Le projeté orthogonal de M sur d est le point d'intersection de d et de la droite perpendiculaire à d passant par M. C'est aussi le point d'intersection de d et du plan perpendiculaire à d passant par M.



Propriété 4
Le projeté orthogonal de M sur d est le point de d le plus proche de M.

3.2 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Définition 7
Soit $\mathscr{P}$ un plan et M un point. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par M.



Propriété 5
Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Démonstration :
Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$. Soit A un point quelconque de $\mathscr{P}$. La droite (MH) est orthogonale à $\mathscr{P}$, donc orthogonale à toute les droites de $\mathscr{P}$, donc en particulier à la droite (HA).

Ainsi, le triangle MHA est rectangle en H, donc son hypoténuse MA est le plus grand côté. Donc $MA \geq MH$. ■

3.3 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 2
Soit $\mathscr{P}$ un plan. Il existe un quadruplet de réels $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ tels que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

Autrement dit, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ caractérise les points de $\mathscr{P}$.

Définition 8
L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est une équation **cartésienne** de $\mathscr{P}$.

Remarque : le triplet (a,b,c,d) n'est pas unique.

En effet, pour tout $k \neq 0$, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est équivalente à l'équation $kax + kby + kcz + kd = 0$. Un plan admet donc une infinité d'équations cartésiennes, les coefficients de l'une étant proportionnels aux coefficients d'une autre.

Exemples d'application :

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{P} \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \iff 2(x-1) - 4(y+2) + 1(z-0) = 0 \iff 2x - 4y + z - 10 = 0$$

   Ainsi, $\mathscr{P}$ admet comme équation cartésienne : $2x - 4y + z - 10 = 0$.

2. $\mathscr{P}$ est-il parallèle au plan $\mathscr{Q}$ d'équation $6x - 12y + 3z - 5 = 0$?

   D'après les coefficients, $\vec{n'}\begin{pmatrix}6\\-12\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$. Or $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, car leurs coordonnées sont proportionnelles. Donc $\mathscr{P}//\mathscr{Q}$.

3. La droite d d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$ est-elle orthogonale à $\mathscr{P}$?

   On voit que d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. Or, $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc d n'est pas orthogonale à $\mathscr{P}$.

4. La droite d est-elle parallèle à $\mathscr{P}$?
   On a : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2 \times 3 - 4 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}$. Donc, $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$.
   Par conséquent, $d//\mathscr{P}$.

5. La droite d est-elle incluse dans $\mathscr{P}$?
   On voit que d passe par le point $A(2\,;1\,;0)$. Les coordonnées de A sont-elles solution de l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ obtenue ci-dessus ? Non, car $2 \times 2 - 4 \times 1 + 0 - 10 = -10 \neq 0$. Donc A n'appartient pas à $\mathscr{P}$, donc d n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.

6. Déterminer les coordonnées de I, point d'intersection de d et du plan $\mathscr{R}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.
   Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de I vérifient les équations de d et de $\mathscr{R}$. On remplace donc dans l'équation de $\mathscr{R}$: x par $2 + 3t$, y par $1 + t$ et z par $-2t$.
   On obtient : $2 + 3t + 1 + t - 2t - 1 = 0$. On résout cette équation, on trouve $t = -1$. On remplace dans le système de représentation paramétrique de d, on trouve : $x = -1$, $y = 0$, $z = 2$.
   Donc I a pour coordonnées $(-1\,;0\,;2)$.

4 Les démonstrations

Définition 1 :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre défini par une des définition équivalentes suivantes :

1. Expression dans une base **orthonormée** :
   Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$; si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.

Montrons que ces définitions sont équivalentes.

Démonstration :

(1) équivalent à (3) :

Dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur est donnée par la formule : $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$.

Donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2=x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2+2(xx'+yy'+zz')$$

D'autre part : $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$ et $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$.

On a donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2(xx'+yy'+zz')$$

On a donc lorsque la base est orthonormée : $\dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)=xx'+yy'+zz'$.

Au passage, cela montre que la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ est correcte quelle que soit la base orthonormée choisie.

(1) équivalent à (2) :

Posons : $r=\|\vec{u}\|$, $r'=\|\vec{v}\|$ et θ une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$. Choisissons une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en prenant d'une part $\vec{i}$ colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ et d'autre part $\vec{j}$ tel que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{j}$ sont coplanaires et $(\vec{i},\vec{j})$ mesure $+\dfrac{\pi}{2}$.

On a alors $\vec{u}\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}r'\cos(\theta)\\r'\sin(\theta)\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $xx'+yy'+zz'=rr'\cos(\theta)$.

Cela s'écrit encore : $xx'+yy'+zz'=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$. ■

Propriété 1 :

1. Posons : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$. On a alors : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\vec{u}\perp\vec{v}$ (avec la convention que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.)
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (Bilinéarité.)

Démonstration :
On se base sur la définition.

1. D'après la définition 1.1, on a : $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2+z^2=\|\vec{u}\|^2$.

2. D'après la définition 1.3, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
   Or, d'après le théorème de Pythagore :
   $$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$
3. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$. D'après la définition 1.1, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = x'x + y'y + z'z = \vec{v} \cdot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') + z(z'+z'') = xx' + yy' + zz' + xx'' + yy'' + zz'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
   $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = xkx' + yky' + zkz' = k(xx' + yy' + zz') = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

■

Propriété 3 :

Si un vecteur est normal à un plan, alors il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Démonstration :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$, tels que $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors d'après la définition des vecteurs coplanaires, tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{P}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Utilisant la bilinéarité, on peut donc écrire : $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{n} \cdot \vec{u} + b\vec{n} \cdot \vec{v}$.

Or, $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$, donc $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Par conséquent, $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$, donc $\vec{n} \perp \vec{w}$. ■

Théorème 2 :

Soit $\mathscr{P}$ un plan. Il existe un quadruplet de réels $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ tels que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

Autrement dit, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ caractérise les points de $\mathscr{P}$.

Démonstration :
Soit $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$, et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de $\mathscr{P}$.

Pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ par définition, donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

On a donc : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, soit $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$. Posons : $d = -ax_A - by_A - cz_A$.
On obtient : $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement, si les coordonnées de M vérifient $ax + by + cz + d = 0$, alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ donc $M \in \mathscr{P}$. ■