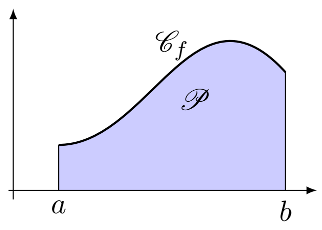
Intégration

1 Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Prérequis : On considère connue une notion intuitive d'aire. L'aire d'une figure plane peut être vue comme le nombre d'unités d'aire nécessaire pour recouvrir exactement cette figure, au besoin après un grand nombre de découpages et assemblages. Le problème est qu'en général, le calcul exact nécesssite un passage à la limite, comme par exemple dans le calcul de l'aire d'un disque par la méthode d'Archimède.

1.1 Définition

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$, et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On lui associe la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les deux droites d'équation $x=a$ et $x=b$, autrement dit, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Nous admettrons le résultat suivant : **Si f est continue, la partie $\mathscr{P}$ admet une aire.**

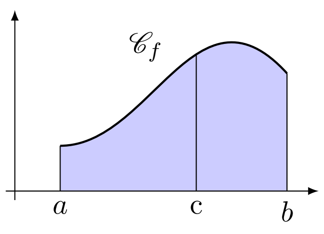
Dans la suite du cours, les fonctions rencontrées seront supposées continues.

Définition 1
On appelle aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b l'aire de la partie $\mathscr{P}$.

Remarque :

Cette aire est exprimée en unités d'aire. Attention : l'unité d'aire n'est pas forcément le cm^2.

Propriété 1 (Relation de Chasles)
Pour $x \leq y$, notons $\mathscr{A}(x;y)$ l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre x et y.
Pour tout $c \in [a\,;b]$, on a alors : $\mathscr{A}(a;b) = \mathscr{A}(a;c) + \mathscr{A}(c;b)$.



Cette propriété traduit l'idée intuitive selon laquelle on retrouve l'aire entre a et b par assemblage en ajoutant l'aire entre a et c et l'aire entre c et b.

1.2 Fonction aire

Conservons les notations précédentes. Pour tout $x \in [a\,;b]$, on peut calculer l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et x. On définit ainsi sur $[a\,;b]$ une fonction F : $F(x) = \mathscr{A}(a\,;x)$.

On vérifie facilement que la fonction F est :

- positive (car une aire est un nombre positif),
- croissante (car lorsque x augmente, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et x augmente.

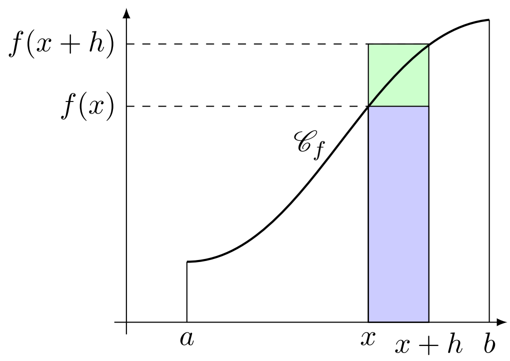
De plus, on a $F(a) = 0$.

1.3 Dérivée d'une fonction aire : cas d'une fonction croissante

Soit f une fonction continue, positive et **croissante** sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout $x \in]a\,; b[$, on définit comme précédemment $F(x) = \mathscr{A}(a; x)$.

Soit h un réel positif tel que $x + h \in [a\,; b]$.

D'après la relation de Chasles (propriété 1), l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et $x+h$ est égale à la somme de l'aire entre a et x et de l'aire entre x et $x+h$; par conséquent l'aire entre x et $x+h$ vaut $F(x+h) - F(x)$. Comme la fonction f est croissante, cette aire peut être encadrée par l'aire de deux rectangles, l'un ayant pour largeur h et pour hauteur $f(x)$ et l'autre ayant pour largeur h et pour hauteur $f(x+h)$.



On en déduit : $h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h)$.

En divisant par h (qui est positif), on obtient : $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ? On sait que $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ car f est continue sur $[a; b]$. On peut donc appliquer le théorème des gendarmes. On obtient : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Soit h un réel négatif tel que $x + h \in [a\,; b]$. On a dans ce cas : $f(x+h) \leq f(x)$. L'aire entre $x+h$ et x est cette fois égale à $F(x) - F(x+h)$; on l'encadre par deux rectangle de largeur $(-h)$.

Donc : $(-h) \times f(x+h) \leq F(x) - F(x+h) \leq (-h) \times f(x)$. En divisant par $-h$ (qui est positif), on obtient : $f(x+h) \leq \dfrac{F(x) - F(x+h)}{-h} \leq f(x)$, soit $f(x+h) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$.

Appliquant à nouveau le théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Les limites à droite et à gauche sont égales, on peut donc écrire : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Conclusion : $F'(x) = f(x)$. Autrement dit, F est une primitive de f sur $]a\,; b[$.

1.4 Dérivée d'une fonction aire : cas général

La méthode précédente se transpose facilement au cas d'une fonction décroissante. Grâce à la relation de Chasles, ce résultat se généralise à toutes les fonctions continues, positives et monotones par intervalles, c'est à dire toutes les fonctions positives usuelles.

> **Théorème 1**
> Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,; b]$, la fonction F définie sur $[a\,; b]$ par $F(x) = \mathscr{A}(a; x)$, aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et x, est la primitive de f qui s'annule en a.

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Définition

Propriété 2
Soit f une fonction continue sur I et soient F et G, deux primitives de f sur I. Soient a, $b \in I$. On a alors : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration :
D'après la propriété vue dans le cours sur les primitives, $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante.
Alors $G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. ■

Cette propriété conduit à poser la définition suivante.

Définition 2
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive quelconque de f sur I. On appelle intégrale de f entre a et b le nombre :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Notation : $[F(x)]_a^b = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

2.2 Propriétés de l'intégrale

Propriété 3
Soient f et g, deux fonctions continues sur un intervalle I ; soient a,b,$c \in I$, et soit k, un réel.

1. Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
2. Linéarité :
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
3. Positivité : Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
4. Croissance : Si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Démonstration :
Ces propriétés se démontrent à partir de la définition 2. Soit F une primitive de f, G une primitive de g.

1. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)$
   $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
3. Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors F est croissante sur $[a;b]$ (puisque sa dérivée est positive). Si $a \leq b$, on en déduit : $F(a) \leq F(b)$ soit $F(b) - F(a) \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $g - f \geq 0$; donc $\int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ (par positivité) et donc $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq 0$ (par linéarité) et donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

■

2.3 Lien avec l'aire sous la courbe

Soit f une fonction continue positive sur $[a\,;b]$, F une de ses primitives. La fonction G : $G(x) = F(x) - F(a)$ est une primitive de f et elle s'annule en a. D'après le théorème 1, $G(x)$ représente l'aire $\mathscr{A}(a\,;x)$ sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et x. Par conséquent : $\mathscr{A}(a\,;x) = G(b) = F(b) - F(a)$.

Propriété 4
Si f est continue positive sur $[a; b]$, alors l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b est $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2.4 Aire entre deux courbes

Soient f et g, deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. On suppose $f \leq g$ sur $[a\,;b]$.

L'aire $\mathcal{A}$ entre les deux courbes sur $[a\,;b]$ est alors $\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

Si f et g sont positives, c'est une conséquence de la propriété précédente ; sinon, on on remplace f par $f_1 = f + K$ et g par $g_1 = g + K$ où la constante K est choisie de telle sorte que f_1 et g_1 soient positives.

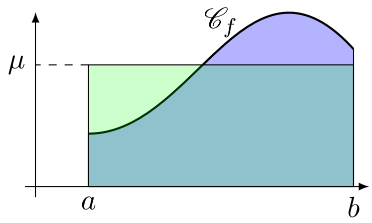
3 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition 3
On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Interprétation : Soit $g : g(x) = \mu$ pour tout x (g est constante), alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Si f est positive, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est égale à celle du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur μ.



Propriété 5 (Inégalité de la moyenne)
Soit f continue sur $[a\,;b]$ et soient m et M deux nombres tels que pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$.
Alors la valeur moyenne μ de f sur $[a\,;b]$ vérifie : $m \leq \mu \leq M$.

Cette propriété est une conséquence de la croissance de l'intégrale : si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors $\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$ c'est à dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

4 Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$. On sait que : $(fg)' = f'g + fg'$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

On utilise cette formule lorsqu'on ne connaît pas de primitive explicite d'une fonction f.

Exemple classique : a et b étant deux réels strictement positifs, on cherche $\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x$.

Posons : $fx) = \ln(x)$ et $g(x) = x$.

On a alors : $\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [\ln(x)\times x]_a^b - \int_a^b \dfrac{1}{x}\times x\mathrm{d}x$

Autrement dit : $\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = b\ln(b) - a\ln(a) - \int_a^b 1\mathrm{d}x = b\ln(b) - a\ln(a) - (b-a)$.

5 Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

On veut une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue et positive f entre a et b, c'est à dire une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. On divise l'intervalle $[a\,;b]$ en n parties égales : on obtient ainsi $n+1$ valeurs : $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. On construit n rectangles de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, de hauteur $f(\theta_k)$, où $\theta_k \in [x_k; x_{k+1}]$. En général, on prend $\theta_k = x_k$, ou $\theta_k = x_{k+1}$, ou encore $\theta_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$. La figure 1, ci-dessous illustre le premier cas avec $n = 6$.

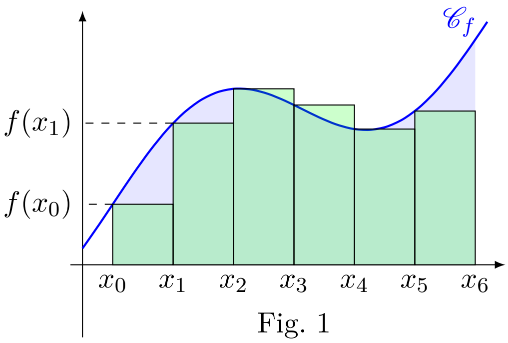


Fig. 1

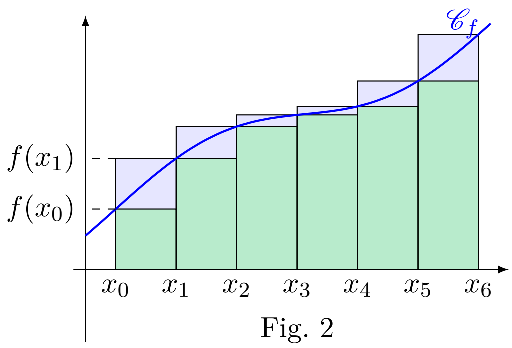


Fig. 2

Si la fonction f ne varie pas trop sur chacun des intervalles $[x_k\,;x_{k+1}]$, l'aire sous la courbe entre x_k et x_{k+1} est proche de l'aire du rectangle de base $[x_k\,;x_{k+1}]$. La somme des aires de chacun des rectangles est donc une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, on démontre que la somme des aires des rectangles tend vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Dans le cas particulier où f est croissante, on voit que l'aire sous la courbe entre x_k et x_{k+1} est comprise entre les deux rectangles de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, l'un de hauteur $f(x_k)$ et l'autre de hauteur $f(x_{k+1})$, comme le montre la figure 2. En nommant $\mathscr{A}_i$ la somme des aires des petits rectangles et $\mathscr{A}_s$ la somme des aires des grands rectangles, on obtient donc : $\mathscr{A}_i \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \mathscr{A}_s$.

Prenons l'exemple où le rectangle de base $[x_k\,;x_{k+1}]$, a pour hauteur $f(x_k)$. Posons : $h = \dfrac{b-a}{n} = x_{k+1} - x_k$.

En appliquant le principe précédent, on trouve :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$