Loi binomiale

1 Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

On peut constituer une expérience aléatoire par la succession de plusieurs expériences aléatoires.

Si le résultat de l'une quelconque de ces expérience ne dépend pas du résultat des autres expériences, on dit qu'elles sont indépendantes les unes des autres et on parle alors de répétitions d'expériences **indépendantes**.

Propriété 1 (admise)
Dans le cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste (ordonnée) d'issues est le **produit** des probabilités de chaque issue :

$$P(a_1\,;a_2\,;\ldots;a_n) = P(a_1) \times P(a_2) \times \ldots \times P(a_n)$$

On peut représenter une succession d'expériences aléatoire par un arbre, et la probabilité d'une liste est le produit des probabilités rencontrées sur le parcours (voir cours de première).

2 Schéma de Bernoulli

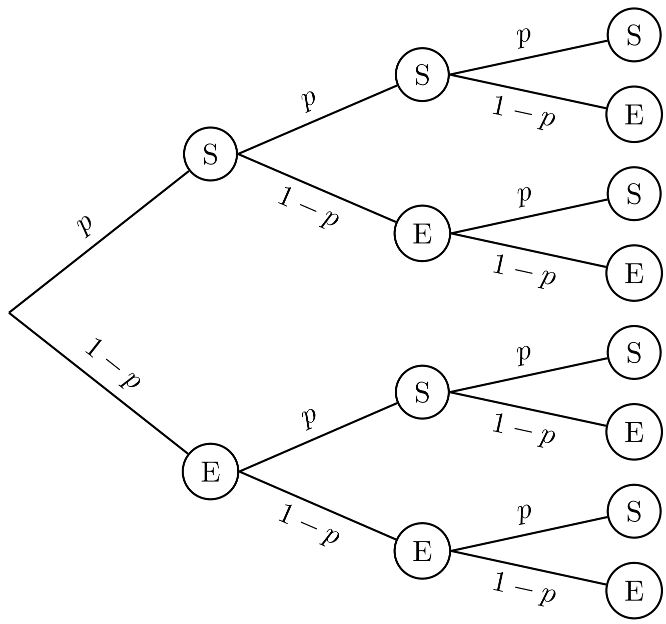
Définition 1
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues (l'univers n'a donc que deux éventualités). On note traditionnellement ces deux issues S (succès) et E (échec).

On note $p = P(S)$ la probabilité d'un succès.

Un **schéma de Bernoulli** est une expérience qui est la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*.

On note n le nombre d'épreuves répétées.

Illustration avec $n = 3$ **:**



Exemples :

1. On lance 20 fois de suite la même pièce.
2. On tire 10 fois de suite une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs et on la remet à chaque fois dans l'urne (tirage avec remise).

Remarque : on peut schématiser une issue par une liste ordonnée de n lettres « S » ou « E ».

Définition 2
On considère une épreuve de Bernoulli, avec $p = P(S)$. La variable X qui vaut 1 pour un succès et 0 pour un échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.

3 Loi binomiale

3.1 Définition

Définition 3
On réalise un schéma de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus. Les valeurs prises par X sont donc tous les entiers de 0 à n. On appelle **loi binomiale** de paramètres n et p, et on note $\mathcal{B}(n; p)$ la loi de probabilité de X.

Elle associe à tout entier $k \in \{0\ ;1\ ;...\ ;n\}$ la probabilité d'obtenir k succès. Cette probabilité dépend du nombre n de répétitions et de la probabilité p d'un succès.

Exemple : on jette une pièce trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois pile ?

Il y a trois manière d'obtenir 2 piles : PPF, PFP et FPP. La probabilité de chacun de ces événements est : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ puisque les épreuves sont indépendantes. La probabilité d'obtenir 2 piles est donc de $\frac{3}{8}$.

3.2 Rappel sur les coefficients binomiaux

On construit l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli de paramètre n et p (rappel : n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès au cours d'une épreuve de Bernoulli.) Le nombre de chemins correspondant à k succès est $\binom{n}{k}$.

Remarque : De façon équivalente, on peut dire que parmi les mots de n lettres qu'on peut fabriquer en utilisant seulement les lettres « S » et « E », $\binom{n}{k}$ est le nombre de mots comportant exactement k fois la lettre « S ».

3.3 Formule générale de la loi binomiale

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p. Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$$

Démonstration :
Chaque liste formée de k succès et donc de $n - k$ échecs, a pour probabilité : $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Le nombre de telles listes est égal au nombre de façons différentes de choisir la position des k succès parmi les n résultats. Il y a $\binom{n}{k}$ listes de ce type.

Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. ■

3.4 Espérance, variance et écart-type

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p.

L'espérance de X est : $\boxed{E(X) = np}$.

La variance de X est : $\boxed{V(X) = np(1 - p)}$ et donc l'écart-type de X est : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}}$.