Primitives et équations différentielles

1 Introduction

Il arrive fréquemment, notamment en physique, qu'on cherche à déterminer une fonction dont la dérivée est connue. Par exemple, si on connaît la résultante des forces appliquées et la masse d'un mobile, on connaît son accélération (2^e loi de Newton). On peut alors essayer d'en déduire sa vitesse, et à partir de celle-ci, sa position. Le cas le plus simple est celui où l'accélération est un vecteur constant (par exemple sur terre, si on néglige les variations de pesanteur, les frottements, etc.) Alors la vitesse est proportionnelle au temps et la position au carré du temps (expériences de Galilée sur la chute des corps).

Mais on veut pouvoir traiter les cas où l'accélération n'est pas constante et, plus généralement, obtenir le plus de renseignements possible sur une fonction à partir de sa dérivée. Graphiquement, il s'agit de déterminer une courbe à partir du coefficient directeur de ses tangentes.

Il arrive aussi que l'étude d'un phénomène montre un lien entre une fonction et sa dérivée, ou entre une fonction et sa dérivée seconde. Par exemple, si un condensateur se décharge dans une résistance, la tension v à ses bornes est proportionnelle à sa dérivée car on a à la fois $v = Ri$ et $i = -C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (i étant l'intensité, R la valeur de la résistance et C la capacité du condensateur).

On écrira formellement ceci sous la forme $y'(x) = \varphi(x\,,\,y(x))$, où y représente la fonction qu'on étudie, y' sa dérivée et φ une fonction quelconque de x et de $y(x)$. La fonction φ doit être suffisamment simple pour que le problème puisse être traité, mais de toute façon, on n'envisage en terminale que quelques cas particuliers.

Ce genre d'équation, où intervient une fonction et sa dérivée s'appelle une **équation différentielle**. Il faut remarquer tout de suite que *l'inconnue* de cette équation est une *fonction*. Ainsi, une solution d'une équation différentielle est une fonction, pas un nombre. Mais comme pour les équations habituelles, il se peut qu'il y ait une, plusieurs ou aucune solution.

Quand la variable est connue, elle est souvent omise. On écrira par exemple : $y' = ay$ pour : $y'(x) = ay(x)$ pour tout x ou $y' = f$ pour $y'(x) = f(x)$ pour tout x. On perçoit mieux que les objets qui interviennent sont des fonctions. La variable est en général notée x ou t, en particulier quand elle représente le temps.

Exemples :

1. $y' = 0$. On cherche une fonction dont la dérivée soit nulle. On sait que les fonctions solutions sont les fonctions constantes. Il y en a une infinité.
2. $y' = y$. On cherche une fonction qui soit égale à sa dérivée. On connaît au moins une solution : il s'agit de la fonction exponentielle. On va voir qu'il en existe ici aussi une infinité.
3. $y' = 2\dfrac{y}{x}$. D'abord, une solution ne peut pas être définie pour $x = 0$.
   On voit que la restriction à $]0\,;+\infty[$ de la fonction « carré » est solution. Il y en a d'autres, par exemple la restriction à $]0\,;+\infty[$ de la fonction nulle.

Dans un premier temps, on s'intéresse à des équations différentielle du type $y' = f$.

2 Primitive d'une fonction continue

2.1 Définition

Définition 1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F, définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Propriété 1
Soit f une fonction sur I.
Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité. Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies par : $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Démonstration :
Les fonctions F et G ont la même dérivée, car on ajoute une constante pour passer de $F(x)$ à $G(x)$.

Réciproquement, soient F et G deux primitives de f. Posons $H(x) = G(x) - F(x)$. On a : $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. La fonction H est donc constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $H(x) = C$. On en déduit : pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = C$, soit $G(x) = F(x) + C$. ■

Théorème 1 (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

2.2 Propriétés et primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de f sur I ; C est une constante réelle.

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier ≤ -2	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$

F, U, V sont des primitives respectivement de f, u, v ; k est un réel.

$f(x)$	$F(x)$	Condition
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x) + C$	
$k \cdot u(x)$	$k \cdot U(x) + C$	
$u'(x) \cdot u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{U^{n+1}(x)}{n+1} + C$	
$u'(x) \cdot u^n(x)$, n entier ≤ -2	$\dfrac{U^{n+1}(x)}{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + C$	$u(x) \in]0; +\infty[$
$u'(x) \cdot \mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + C$	
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$	$u(x) \in]0; +\infty[$
$u(ax+b)$	$\dfrac{1}{a} \cdot U(ax+b) + C$	

Propriété 2 (condition initiale)
Soit f, une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Parmi toute les primitives de f sur I, une seule vérifie la « condition initiale » $(x_0\,;y_0)$, c'est à dire : il existe une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :
Soit G une primitive de f sur I. Toute primitive F de f sur I vérifie : $F(x) = G(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Si $F(x_0) = y_0$, alors $G(x_0) + C = y_0$, donc $C = y_0 - G(x_0)$.

Réciproquement, cette valeur de C convient et détermine une seule primitive F. ■

On s'intéresse à présent à un autre type simple d'équation différentielle.

3 Équations différentielles de la forme *y'=ay+b*

3.1 Cas particulier : l'équation « homogène » *y'=ay*

Rappel : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur un intervalle I sont les fonction f vérifiant $f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $f : f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution. En effet, on a $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$ d'après la formule de dérivation d'une fonction composée. Est-ce la seule ? Pour le savoir, soit g une autre solution : $g' = ag$.

Formons la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$.

Alors $h'(x) = \dfrac{g'(x)\mathrm{e}^{ax} - g(x)a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax})^2} = \dfrac{ag(x)\mathrm{e}^{ax} - ag(x)\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax})^2} = 0$.

Ainsi, h est une fonction constante : $h(x) = C$ pour tout $x \in I$ et donc : $g(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Réciproquement, toute fonction de ce type est solution (vérification facile).

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f telles que : $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle.

3.2 Le cas général

Définition 2
Soient a, b, deux nombres réels avec $a \neq 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Une solution de l'équation $y' = ay + b$ sur I est une fonction f vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = af(x) + b.$$

Théorème 2
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f, définies sur $I \subset \mathbb{R}$, vérifiant :

$$f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Démonstration :
Si $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, alors $f'(x) = aC\mathrm{e}^{ax}$; d'autre part : $af(x) + b = aC\mathrm{e}^{ax} - a \times \dfrac{b}{a} + b = aC\mathrm{e}^{ax}$. On a bien $f' = af + b$.

Réciproquement, soit g une autre solution. Posons $h(x) = g(x) + \dfrac{b}{a}$.

Alors $h'(x) = g'(x) = ag(x) + b = a\left(g(x) + \dfrac{b}{a}\right) = ah(x)$.

h est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, donc est de la forme : $h(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, d'après le cas particulier vu précédemment.

On en déduit : $g(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$. ■

Exemple : Soit (E) l'équation $y' = 2y + 5$.

D'après le théorème 2 : les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f telles que : $f(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$.

Vérifions que c'est juste : $f'(x) = 2C\mathrm{e}^{2x}$ et : $2f(x) + 5 = 2\left(C\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}\right) + 5 = 2C\mathrm{e}^{2x}$. Ça marche.

Propriété 3 (condition initiale)
Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Parmi toute les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur I, une seule vérifie la « condition initiale » $(x_0\,;y_0)$, c'est à dire :
il existe une seule fonction f solution de $y' = ay + b$ sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

La démonstration est identique à celle de la propriété 2.

Exemple : Soit (E) l'équation $y' = 2y+5$. Déterminer la solution f vérifiant la condition initiale : $f(0) = -3$.

On a vu que f est de la forme : $f(t) = C\,\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{5}{2}$.

On a donc : $f(0) = C\mathrm{e}^{2\times 0} - \dfrac{5}{2} = C - \dfrac{5}{2} = -3$; donc $C = -3 + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $f(t) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{5}{2}$

Représentation graphique :

Pour représenter quelques solutions de cette équation différentielle, on peut utiliser le logiciel Geogebra :

Taper dans la barre de saisie : `Séquence[C*e^(2x) - 5/2), C, -5, 5,0.5]`.

On obtient une série de courbe, le paramètre C prenant les valeurs -5, $-4,5$, ... jusqu'à 5.

On vérifie que seule la courbe obtenue pour $C = -0,5$ passe par $(0\,;-3)$.