Suites

1 Rappels

Définition 1
Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres réels, numérotés par des *indices* qui sont des nombres entiers naturels consécutifs 0, 1, 2...
Si la suite est désignée par la lettre u, à chaque entier naturel n est associé un réel, noté u_n appelé terme d'indice (ou de *rang*) n, de la suite.

La notation u_n se lit « u indice n ».

La notation (u_n), entre parenthèses, signifie la suite entière (tous les termes).

Représentation graphique :

Comme pour une fonction, on peut représenter graphiquement une suite numérique (u_n) par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$, c'est une représentation graphique « discrète », c'est à dire « non continue ».

Mode de génération :

1. Formule explicite : On calcule u_n directement à partir de n.
2. Formule de récurrence : À partir d'un terme u_n quelconque, on calcule le terme suivant, u_{n+1}. Il faut donner un premier terme pour commencer le calcul, c'est en général u_0.

Remarque : Il y a aussi des suites qui ne se définissent ni par une formule explicite ni par une relation de récurrence. Par exemple, la suite des nombres premiers ou des décimales de π.

Sens de variation - Majoration et minoration

Définition 2
Soit p un entier naturel. On dit que :
- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$: $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$: $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée.

Suites arithmétiques et géométriques :

Définition 3
Une suite est arithmétique si chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant une constante r appelée *raison* de la suite.
Une suite est géométrique si chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q appelée *raison* de la suite.

- Suite arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Suite géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Propriétés d'une suite arithmétique :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
2. $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
3. (Conséquence) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :
   $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \dfrac{\text{nombre de termes } \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Propriétés d'une suite géométrique :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
2. $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
3. (Conséquence) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors :
   $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

2 Limite d'une suite - Définitions

Définition 4
La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
Autrement dit : Quel que soit le nombre A (même très grand), tous les termes u_n de la suite sont supérieurs ou égaux à A à partir d'un certain rang.
On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi, tous les termes de la suites sont supérieurs à 1000 à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont supérieurs à 1 000 000 à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi grands qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.

Définition 5
La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;B]$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, tous les termes de la suites sont inférieurs à -1000 à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont inférieurs à $-1\,000\,000$ à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi petits (aussi négatifs) qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.

Définition 6
La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
Autrement dit : quelle que soit la distance r strictement positive (mais aussi petite qu'on veut), tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]\ell - r\,;\ell + r[$ à partir d'un certain rang.

Ainsi, tous les termes de la suite sont situés dans $]\ell - 0{,}001\,;\ell + 0{,}001[$ à partir d'un certain rang.

Tous les termes sont dans $]\ell - 0{,}000001\,;\ell + 0{,}000001[$ à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi près que l'on veut de ℓ, à condition de choisir n assez grand.

Exemples :

1. Posons $u_n = 3n$. On constate que $3n$ devient aussi grand qu'on veut, à condition de choisir n assez grand. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$.
2. Posons $u_n = \dfrac{1}{n}$. On constate que $\dfrac{1}{n}$ devient aussi proche de 0 qu'on veut, à condition de choisir n assez grand. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
3. On pose $u_n = (-1)^n$. On constate que $(-1)^n$ vaut alternativement $1\,;\,-1\,;\,1\,;\,-1$, etc. suivant que n est pair ou impair. Dans ce cas, (u_n) n'a pas de limite : en effet, u_n ne prend pas de grandes valeurs, mais ne se rapproche pas non plus d'aussi près qu'on veut d'un nombre donné.

Remarque : si une suite (u_n) a une limite, celle-ci est nécessairement unique. En effet, supposons que (u_n) admette comme limites deux nombres différents, a et b. D'après la définition, cela signifie que u_n devient aussi proche qu'on veut à la fois de a et de b, à condition de choisir n suffisamment grand. Cela implique que a et b sont aussi proches qu'on veut, et donc qu'ils sont égaux.

Vocabulaire : Une suite est **convergente** si elle a une limite finie. Elle est **divergente** si elle a une limite infinie ou pas de limite du tout.

3 Propriétés des limites

Limites de référence :

Propriété 1

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^3 = ... = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = ... = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Opérations et limites :

Soient ℓ et m deux nombres ; soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Propriété 2

Somme :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n =$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell + m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n =$	m	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times m$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes.

Inverse :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^-	0^+	0
alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

Comportement d'une suite géométrique :

Propriété 3 (démonstration en exercice)

Soit q un nombre réel.

- Si $q \leq -1$ alors q^n n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}87^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}9)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n$ n'existe pas.

4 Limite et monotonie

Théorème 1
Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Comme (u_n) n'est pas majorée, pour tout nombre A, même très grand, il existe un rang p pour lequel $u_p \geq A$.

Comme d'autre part (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$.

Donc, pour tout nombre A, $u_n \geq A$ à partir d'un certain rang. On applique alors la définition 4. ■

Théorème 2 (admis)
Toute suite croissante majorée est convergente (elle a une limite finie).
Toute suite décroissante minorée est convergente.

Soit (u_n) une suite croissante majorée. Admettons que la limite existe (c'est la partie difficile de la démonstration). Cette limite ne peut pas être $+\infty$, sinon la suite ne serait pas majorée. Ce n'est pas non plus $-\infty$ car la suite est minorée (par u_0). Donc cette limite est finie.

5 Limite et comparaison

Soient (u_n), (v_n) et (w_n), trois suites.

Théorème 3
Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration :
Prouvons la première assertion : on suppose que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang p.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors pour tout A, tous les v_n sont supérieurs à A à partir d'un certain rang m.

Donc, pour tout n supérieur ou égal à p et à m, $u_n \geq v_n \geq A$.

Ainsi, $u_n \geq A$ à partir du rang n. On applique alors la définition 4. ■

On utilise en général ce théorème en comparant la suite donnée à une suite de référence.

Exemple : étudier la limite éventuelle de $u_n = n^2 + \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.

Comme $\mathrm{e}^{\sqrt{n}} > 0$, alors $u_n > n^2$. Comme n^2 tend vers $+\infty$, alors u_n tend aussi vers $+\infty$.

Théorème 4 (« théorème des gendarmes »)
Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (u_n) et (w_n) sont convergentes, de même limite ℓ, alors (v_n) est elle aussi convergente et de limite ℓ.

Ce théorème s'applique bien lorsqu'on étudie le produit de deux suites dont l'une est bornée et l'autre tend vers 0. Suites bornées classiques : $(-1)^n$, $\sin(n)$, $\cos(n)$...

Exemple : étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\cos(n)}{n}$.

On pose : $u_n = -\dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ et $w_n = \dfrac{1}{n}$.

Comme on a pour tout n : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, alors : $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$, soit $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$