Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+5x-e^x = -\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2x^2-x+1 = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^3+5x = 6$

Donc, par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x^2-x+1}{x^3+5x} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}+2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x+2 = 5$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} 9-x^2 = 0^-$ car $x>3$ implique $x^2>9$ puisque la fonction « carré » est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc, par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x+2}{9-x^2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2 = +\infty$

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x^2+2) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(5x+3) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5xe^x+3e^x$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, d'après le cours

et : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(5x+3) = 0$

2. On voit que les limites précédente se traduisent graphiquement par la présence de deux asymptotes :
   Pour la question d), il y a une asymptote verticale d'équation $x = 3$.
   Pour la question f), il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Exercice 2 :

1. On sait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, on a pour tout x : $-1 \leq \sin\left(x^2 + 8x - 4\right) \leq 1$
   Comme on cherche une limite en $+\infty$, on peut supposer $3x + 5 > 0$.
   Dans ce cas, on obtient en divisant par $3x + 5$: $-\dfrac{1}{3x+5} \leq \dfrac{\sin\left(x^2+8x-4\right)}{3x+5} \leq \dfrac{1}{3x+5}$
   On calcule les limites des expressions encadrantes :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{3x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x+5} = 0$
   On en déduit d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(x^2+8x-4\right)}{3x+5} = 0$

2. On a comme précédemment : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
   Donc : $-3 \leq \cos(x) \leq 3$
   Et donc : $2 \leq 3\cos(x) + 5 \leq 8$
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x, on en déduit : $2\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^x\,(3\cos(x) + 5)$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x = +\infty$
   Donc, par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\,(3\cos(x) + 5) = +\infty$

Exercice 3 :

1. On rappelle la formule de première :
   a et b étant deux réels, si $h(x) = g(ax + b)$, alors $h'(x) = ag'(ax + b)$.
   Appliqué au cas de la fonction exponentielle, on obtient : si $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$, alors $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

   f étant définie comme un produit, on pose : $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$ d'après la règle rappelée ci-dessus.
   On a alors : $f = uv$, donc $f' = u'v + uv'$, ce qui donne : $f'(x) = 1\mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Vu que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(1 - x)$.
   On résout par exemple : $1 - x \geq 0$ qui donne : $x \leq 1$.

   D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

   $f(0) = 0$ (facile) et $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}367$.

3. En écrivant : $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$:

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (d'après le cours).
   Donc, en passant à l'inverse : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, ce qui s'écrit aussi : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

   En utilisant la limite d'une composée :
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{y\to-\infty} y\mathrm{e}^y = 0\end{array}\right\} \quad \text{donc : } \lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-x} = 0$$
   ce qui équivaut à : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Complétons :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Exercice 4 :

1. f peut être bornée sans avoir de limite en $+\infty$. Contre-exemple simple : sin ou cos.
   L'affirmation est donc FAUSSE.

2. Posons : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, ℓ étant finie par hypothèse.
   Cela signifie que $f(x)$ est aussi proche qu'on le veut de ℓ à condition de prendre x assez grand.
   Choisissons donc un réel a tels que $f(x)$ soit distant de ℓ de moins de 1 unité lorsque $x \geq a$, c'est à dire : pour tout $x \geq a$, on a l'encadrement : $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$.

   On a donc :
   si $x \geq a$, alors $f(x) \leq \ell + 1$.
   et d'autre part : si $x \leq a$, alors $f(x) \leq f(a)$ (car f est croissante).

   Si on choisit un réel b supérieur à la fois à $\ell + 1$ et à $f(a)$, on obtient : $f(x) \leq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, f est bien majorée. L'affirmation est VRAIE.