Mathématiques - Devoir surveillé n° 4

Exercice 1 (8 points) :

1. Déterminer les limites suivantes à l'aide des résultats du cours :
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\mathrm{e}^x + 5x^2$
   b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 5x}$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2}$
   d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2}$
   e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^3 + 5$
   f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x-7}$
2. Interpréter les limites précédentes en termes d'asymptotes, lorsqu'il y a lieu (donner les équations de ces asymptotes).

Exercice 2 (2 points) :

Déterminer la limite suivante en utilisant un théorème de comparaison.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(6\cos(x) + 10)$

Exercice 3 (8 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et compléter le tableau.
   (Note : il y a 6 limites à trouver.)

Exercice 4 (2 points) :

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (justifier) :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.