Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ (d'après le cours), donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\mathrm{e}^x = 0$

D'autre part :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (cours), donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$

Donc, par somme :

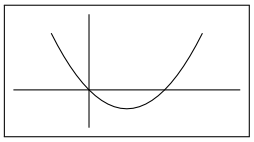
$\lim\limits_{x\to-\infty} 3\mathrm{e}^x + 5x^2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 2x^2 - x + 1 = 1$ (par somme et produit)

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 - 5x = 0$ (idem)

Il faut savoir si le dénominateur tend vers 0 en gardant un signe constant. Or, c'est un trinôme du second degré qui se factorise immédiatement : $x^2 - 5x = x(x-5)$.

Il a donc deux racines, 0 et 5 et il est donc négatif entre 0 et 5 :



On peut donc préciser : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 - 5x = 0^-$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2-5x} = -\infty$ (par inverse)

Donc, par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{2x^2-x+1}{x^2-5x} = -\infty$

c) C'est une fonction rationnelle ; d'après la propriété du cours, la limite en $+\infty$ est donc égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (d'après le cours)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2} = 0$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} + 2 = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x + 2 = 2$

Donc, par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2} = 1$

e) D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^n = 0$

Donc, pour $n = 3$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^3 = 0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^3 + 5 = 5$

f) Le numérateur et le dénominateur ont chacun pour limite $+\infty$; il y a donc une forme indéterminée.

On met en facteur le terme prépondérant, au numérateur et au dénominateur : c'est e^x dans les deux cas.

$$\frac{e^x+3}{e^x-7}=\frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{7}{e^x}\right)}=\frac{1+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{7}{e^x}}$$

Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$ (par inverse)

On en déduit (par produit et somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{e^x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{7}{e^x}=1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^x-7}=1$

2. On repère les cas où l'antécédent tend vers une limite finie et l'image vers une limite infinie, ou vice versa.

b : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2x^2-x+1}{x^2-5x}=-\infty$

Donc la courbe représentant la fonction $x\mapsto\frac{2x^2-x+1}{x^2-5x}$ admet une asymptote verticale d'équation : $x=0$.

c : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+2}=0$

Donc la courbe représentant la fonction $x\mapsto\frac{x+1}{x^2+2}$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y=0$.

e : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^3+5=5$

Donc la courbe représentant la fonction $x\mapsto e^x x^3+5$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y=5$.

f : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^x-7}=1$

Donc la courbe représentant la fonction $x\mapsto\frac{e^x+3}{e^x-7}$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y=1$.

Exercice 2 :

On part de l'encadrement bien connu, vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-1\leq\cos(x)\leq1$

On en déduit successivement :

$-6\leq6\cos(x)\leq6$

$4\leq6\cos(x)+10\leq16$

$4\sqrt{x}\leq\sqrt{x}(6\cos(x)+10)\leq16\sqrt{x}$ (le sens est conservé car $\sqrt{x}\geq0$)

D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}4\sqrt{x}=+\infty$

Ainsi : $4\sqrt{x}\leq\sqrt{x}(6\cos(x)+10)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\sqrt{x}=+\infty$.

D'après le théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(6\cos(x)+10)=+\infty$.

Exercice 3 :

1. $f=\frac{u}{v}$ avec : $u(x)=x^2+1$ et $v(x)=x^2-1$.

   Alors : $f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ (formule classique).

On a ici : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x$.

On en déduit : $f'(x) = \dfrac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)2x}{(x^2-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x\Big(\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\Big)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x\times(-2)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

2. Comme le dénominateur est toujours positif (c'est un carré), $f'(x)$ est du signe de $-4x$.

   On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

   On trouve facilement : $f(0) = \dfrac{1}{-1} = -1$

3. On voit que f est une fonction rationnelle. En $-\infty$ et $+\infty$, sa limite est donc celle du quotient des termes de plus haut degré.

   Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

   D'autre part, $f(x)$ est du signe de son dénominateur, puisque son numérateur est toujours strictement positif.
   Les racines de x^2-1 sont -1 et 1, donc x^2-1 est positif, sauf entre -1 et 1.

   $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2+1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2-1 = 0^+$, donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2+1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2-1 = 0^-$, donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2+1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2-1 = 0^-$, donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2+1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2-1 = 0^+$, donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

   On vérifie que ces limites sont cohérentes avec les variations de f...

Exercice 4 :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

   Si les fonctions f et g ont une limite en $+\infty$, alors l'affirmation est vraie.

   En effet, si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est un nombre non nul a, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2}{a}$: c'est exclu.

   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$: c'est exclu.

   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$: c'est exclu.

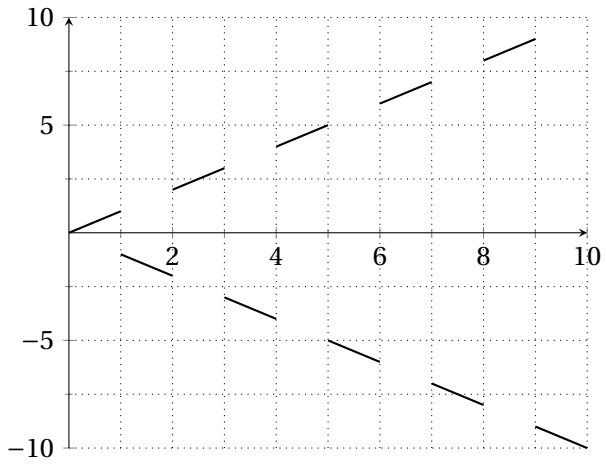
   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $g(x)$ ne garde pas un signe constant au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas : c'est exclu.

   Il reste donc comme seule solution : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.
   L'affirmation est donc vraie.

   Mais l'affirmation peut être fausse si g n'a pas de limite. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{|g(x)|} = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty$ (par inverse).
   Autrement dit, $|g(x)| \geq A$ pour n'importe quel réel A fixé à l'avance.
   Si g ne change pas de signe, la conclusion reste valable, mais elle peut être en défaut si g change de signe.

   Un exemple assez tordu est celui-ci : $g(x) = (-1)^{Ent(x)} \times x$ où $Ent(x)$ est la partie entière de x. Les images $g(x)$ sont de plus en plus grandes en valeur absolue, mais changent de signe suivant que $Ent(x)$ est pair ou impair.

   Un petit graphique, pour mieux comprendre :



   On voit que dans ce cas, g n'a pas de limite en $+\infty$.

   Ainsi, l'affirmation peut être fausse si on ne suppose pas que g a une limite.
   Évidemment, il n'était pas demandé de penser à ces subtilités le jour du devoir ; c'est simplement moi qui ai oublié de préciser dans l'énoncé que g admet une limite. J'ai donc compté juste dans tous les cas.

2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   Supposons que g a une limite en $+\infty$.

   Posons : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = a$. Si a est un réel non nul, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{a}$ et par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.

   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, et on a à nouveau $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc la seule possibilité est $a = 0$. L'affirmation est donc vraie.

Si on ne suppose pas que g a une limite, il faut faire un peu plus attention, mais la conclusion reste valable. Supposons en effet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$. Cela signifie que pour un certain réel $r > 0$, il existe des valeurs de x aussi grandes qu'on veut pour lesquelles $g(x)$ est à une distance au moins égale à r de 0 ($g(x)$ n'est pas « dans le tube »). Par conséquent, $\dfrac{1}{g(x)}$ est compris entre $-1/r$ et $1/r$, autrement dit, $g(x)$ est borné. Autrement dit, même en prenant x assez grand, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas toujours aussi grand qu'on veut.

Mais ceci est impossible, puisqu'on a supposé $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Donc, la conclusion est encore vraie.

Évidemment, comme dans la question précédente, j'ai compté juste si on raisonne en supposant que g a une limite.