Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1.

a) On cherche la limite en $-\infty$ d'un polynôme, elle est égale à la limite du terme de plus haut degré, d'après la propriété du cours.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 + 5x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; donc (par produit), $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 + 5x - 2 = +\infty}$.

b) On cherche la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle, elle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, d'après la propriété du cours.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}$.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x} = \dfrac{1}{2}}$.

c) Limite du numérateur : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x^2 + 3 = 2^2 + 3 = 7$

Limite du dénominateur : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$

Donc (passage à l'inverse) : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1}{x - 2} = +\infty$

Et donc (par produit) : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x^2 + 3}{x - 2} = +\infty}$.

d) Limite du numérateur : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} x + 1 = -3 + 1 = -2$

Limite du dénominateur : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} x^2 - 9 = 0^+$

Donc (passage à l'inverse) : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{1}{x^2 - 9} = +\infty$

Et donc (par produit) : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{x + 1}{x^2 - 9} = -\infty}$.

e) D'après le cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 2 = 2}$.

f) On a une forme indéterminée du type « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

On peut écrire : $\dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \dfrac{3}{x}$.

Or, d'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

et : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{3}{x} = 0$.

Donc (par somme) : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{x} = +\infty}$.

Pour le b) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x} = \dfrac{1}{2}$, donc la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x}$ admet une asymptote d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

Pour le c) : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x^2 + 3}{x - 2} = +\infty$, donc la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$ admet une asymptote d'équation $x = 2$.

Pour le d) : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{x + 1}{x^2 - 9} = -\infty$, donc la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x^2 - 9}$ admet une asymptote d'équation $x = -3$.

Pour le e) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 2 = 2$, donc la courbe représentant la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$ admet une asymptote d'équation $y = 2$.

Exercice 2 :

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos(5x) \leq 1$. On peut diviser par $x^2 + 1$, qui est positif.
   On obtient : $-\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{\cos(5x)}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$
   Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$
   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(5x)}{x^2+1} = 0$.

2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin(x^2 + 1) \leq 1$. On multiplie par -5 et on ajoute $3x$.
   On obtient : $3x - 5 \leq 3x - 5\sin(x^2 + 1) \leq 3x + 5$.
   Ici, il suffit d'écrire : $3x - 5 \leq 3x - 5\sin(x^2 + 1)$
   En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - 5 = +\infty$
   D'après le théorème de comparaison, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - 5\sin(x^2 + 1) = +\infty$.

Exercice 3 :

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{n+1}}$
   $f(x)$ se présente comme un quotient. On applique la formule de dérivation : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   Ainsi : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x^{n+1} - \mathrm{e}^x \times (n+1)x^n}{\left(x^{n+1}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x \left(x^{n+1} - (n+1)x^n\right)}{\left(x^{n+1}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x \left(x^n \times x - (n+1)x^n\right)}{\left(x^{n+1}\right)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^x \left(x - (n+1)\right)}{\left(x^{n+1}\right)^2}$

2. On étudie le signe du numérateur et du dénominateur.
   Le dénominateur est un carré, donc positif.
   Au numérateur : x^n est positif car $x \in]0\,;+\infty[$; e^x est positif (propriété de la fonction exponentielle).
   Donc $f'(x)$ est du signe de $x - (n+1)$. On obtient le tableau :

x	0		$n+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{n+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n \times x} \geq m$ pour tout x.

   Comme x est positif, on en déduit : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} \geq mx$

4. D'après le tableau, $m = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ est un nombre positif.

   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} mx = +\infty$

   Grâce au théorème de comparaison, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$

Exercice 4 :

1. C'est faux, car f peut avoir une limite finie. Par exemple, si $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, f est croissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. C'est vrai. En effet, si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5$, alors $f(x)$ et $g(x)$ sont du même ordre de grandeur.

   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ était finie, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ serait $+\infty$ ou $-\infty$.

   Si on avait $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ serait négative.

   Donc, il faut avoir : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ pour avoir : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5$.