

# Mathématiques - Devoir surveillé n° 3

## Exercice 1 (8 points) :

1. Déterminer les limites suivantes à l'aide des résultats du cours :

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 5x - 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x}$

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + 3}{x - 2}$

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \frac{x + 1}{x^2 - 9}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3}{x}$

2. Interpréter les limites précédentes en termes d'asymptotes, lorsqu'il y a lieu (donner les équations de ces asymptotes).

## Exercice 2 (4 points) :

Déterminer les limites suivantes en utilisant un théorème de comparaison.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 \sin(x^2 + 1)$

**Exercice 3 (6 points) :** Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}}$ .

1. Calculer la dérivée de  $f$  et montrer que  $f'(x) = \frac{x^n e^x (x - (n + 1))}{(x^{n+1})^2}$

2. Étudier le signe de  $f'$  et en déduire le tableau de variation de  $f$ .

3. Soit  $m$  le minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{e^x}{x^n} \geq mx$ .

4. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ .

## Exercice 4 (2 points) :

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (justifier) :

1. Si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .