# Correction du devoir surveillé n° 4

**Exercice 1 :**

1.a) $\ln(5x)+\ln(8x^2)-\ln\left(\dfrac{x^3}{2}\right)$

$=\ln(5)+\ln(x)+\ln(8)+2\ln(x)-\Big(3\ln(x)-\ln(2)\Big)$
$=\ln(5)+\ln(x)+\ln(8)+2\ln(x)-3\ln(x)+\ln(2)$
$=\ln(5)+\ln(8)+\ln(2)$
$=\ln(80)$

b) $\ln\left(\dfrac{x^3}{8}\right)+\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^7}{x^2}\right)+\ln(4x)$
$=3\ln(x)-\ln(8)+\ln(2)+\ln(\mathrm{e}^7)-2\ln(x)+\ln(4)+\ln(x)$
$=2\ln(x)-3\ln(2)+\ln(2)+7+2\ln(2)$
$=2\ln(x)+7$

2.a) On doit avoir : $\begin{cases} 4x>0 \\ x-1>0 \\ 4x-5>0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases}$

En combinant ces conditions, on obtient : $x\in\left]\dfrac{5}{4};+\infty\right[$.
$\ln(4x)+\ln(x-1)=\ln(3)+\ln(4x-5)$
$\ln\Big(4x(x-1)\Big)=\ln\Big(3(4x-5)\Big)$
$\mathrm{e}^{\ln(4x(x-1))}=\mathrm{e}^{\ln(3(4x-5))}$
$4x(x-1)=3(4x-5)$
$4x^2-4x=12x-15$
$4x^2-16x+15=0$
On résout l'équation, on trouve : $x_1=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{5}{2}$.
Ces deux valeurs sont supérieures strictement à $\dfrac{5}{4}$.
L'ensemble solution de l'équation de l'énoncé est donc $\left\{\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right\}$

b) On doit avoir : $\begin{cases} x+4>0 \\ x+1>0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} x>-4 \\ x>-1 \end{cases}$
En combinant ces conditions, on obtient : $x\in\,]-1;+\infty[$.
$\ln(x+4)\leq 2+\ln(x+1)$
$\mathrm{e}^{\ln(x+4)}\leq \mathrm{e}^{2+\ln(x+1)}$
$x+4\leq \mathrm{e}^2\times(x+1)$
$x+4\leq \mathrm{e}^2x+\mathrm{e}^2$
$x-\mathrm{e}^2x\leq \mathrm{e}^2-4$
$(1-\mathrm{e}^2)x\leq \mathrm{e}^2-4$
$x\geq \dfrac{\mathrm{e}^2-4}{1-\mathrm{e}^2}$
$\dfrac{\mathrm{e}^2-4}{1-\mathrm{e}^2}\simeq -0{,}53>-1$
donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $\left]\dfrac{\mathrm{e}^2-4}{1-\mathrm{e}^2};+\infty\right[$

3.a) $4 \times 1{,}2^n \geq 1000$

$1{,}2^n \geq 250$

$\ln(1{,}2^n) \geq \ln(250)$

$n\ln(1{,}2) \geq \ln(250)$

$n \geq \dfrac{\ln(250)}{\ln(1{,}2)} \simeq 30{,}3$

Le plus petit entier $n$ vérifiant la condition de l'énoncé est donc : 31.

b) $10 - 0{,}8^n \geq 9{,}99$

$10 - 9{,}99 \geq 0{,}8^n$

$0{,}01 \geq 0{,}8^n$

$\ln(0{,}01) \geq \ln(0{,}8^n)$

$\ln(0{,}01) \geq n\ln(0{,}8)$

$\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \leq n$

$n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \simeq 20{,}6$

Le plus petit entier $n$ vérifiant la condition de l'énoncé est donc : 21.

**Exercice 2 :**

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ , donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3 + 2\ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{3+2\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Big(3+2\ln(x)\Big) \times \dfrac{1}{x^2} = -\infty$ (par produit).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2\ln(x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ (limite de référence.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ; d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (limites de référence.)

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+2\ln(x)}{x^2} = 0$

c) Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = 0$.

2.a) On applique la formule donnant la dérivée d'un quotient.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{x} \times x^2 - (3+2\ln(x)) \times 2x}{\left(x^2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 6x - 4x\ln(x)}{x^4}$$

$f'(x) = \dfrac{-4x - 4x\ln(x)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{-4x(1+\ln(x))}{x^4}$

b) $x \in ]0;+\infty[$ donc $-4x$ est négatif; $x^4$ est positif, donc il faut étudier le signe de $1+\ln(x)$.

On résout par exemple : $1+\ln(x) \geq 0$
$\ln(x) \geq -1$
$\mathrm{e}^{\ln(x)} \geq \mathrm{e}^{-1}$
$x \geq \mathrm{e}^{-1}$

c) On en déduit le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x^4$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1+\ln(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\mathrm{e}^2$ | ↘ | $0$ |

$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{3+2\ln(\mathrm{e}^{-1})}{(\mathrm{e}^{-1})^2} = \dfrac{3-2}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^2$

3.a) $A$ appartient à l'axe des abscisses si son ordonnée est nulle. On résout donc : $f(x) = 0$.
$\dfrac{3+2\ln(x)}{x^2} = 0$
$3+2\ln(x) = 0$
$2\ln(x) = -3$
$\ln(x) = -\dfrac{3}{2}$
$\mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$
$x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$
Donc $A\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}};0\right)$

b) D'après le tableau de variation et la question précédente, on trouve le tableau de signes :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

4.

| | |
|---|---|
| Initialisation : | Affecter à $k$ la valeur 1 |
| Traitement : | Tant que $\dfrac{3+2\ln(k)}{k^2} > 0{,}1$ : |
| | $k \leftarrow k+1$ |
| | Fin Pour |
| Sortie : | Afficher $k$ |

L'algorithme renvoie la plus petite valeur (entière) de $k$ telle que $f(k) \leq 0{,}1$.
On trouve à la calculatrice : $k = 9$.